

Risposta in frequenza

www.die.ing.unibo.it/pers/mastri/didattica.htm
(versione del 26-4-2016)

Diagrammi di Bode

- Le **funzioni di trasferimento** (f.d.t) dei circuiti lineari tempo invarianti sono funzioni razionali (cioè rapporti tra due polinomi) a coefficienti reali della variabile $j\omega$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{\mathbf{N}(j\omega)}{\mathbf{D}(j\omega)} = \frac{b_m (j\omega)^m + \dots + b_2 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + \dots + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0}$$

- Si può dimostrare che per un sistema fisicamente realizzabile $m \leq n$
- L'andamento di $\mathbf{H}(j\omega)$ viene rappresentato mediante due grafici (**diagrammi di Bode**) che riportano
 - ♦ il modulo (in dB) ➔ **risposta in ampiezza**
 - ♦ l'argomento (in gradi o radianti) ➔ **risposta in fase**in funzione della pulsazione o della frequenza (in scala logaritmica)

Note

- Nella rappresentazione della frequenza (o della pulsazione) in scala logaritmica si mettono in evidenza intervalli di frequenza caratterizzati da un rapporto costante tra la frequenza superiore f_2 e la frequenza inferiore f_1
- In particolare
 - ◆ si chiama **decade** un intervallo per cui $f_2 = 10f_1$
 - ◆ si chiama **ottava** un intervallo per cui $f_2 = 2f_1$
- Normalmente le fasi vengono rappresentate nell'intervallo $[-180^\circ, 180^\circ]$ oppure $[-\pi, \pi]$

3

Poli e zeri

- Per studiare le proprietà delle funzione di trasferimento è conveniente scrivere i polinomi in forma fattorizzata
- A tale fine, conviene sostituire la variabile $j\omega$ con una variabile complessa s (**frequenza complessa**)

$$\mathbf{H}(s) = \frac{\mathbf{N}(s)}{\mathbf{D}(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

- I valori di s per cui si annulla il polinomio $\mathbf{N}(s)$ sono detti **zeri** della f.d.t.
- I valori di s per cui si annulla il polinomio $\mathbf{D}(s)$ sono detti **poli** della f.d.t.
- Se si indicano con z_i ($i = 1, \dots, m$) gli zeri e con p_i ($i = 1, \dots, n$) i poli, è possibile scrivere la f.d.t. nella forma

$$\mathbf{H}(s) = \frac{b_m \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{a_n \prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

4

Ordine della funzione di trasferimento

- L'**ordine di una funzione** di trasferimento corrisponde al numero dei poli, quindi al grado n del denominatore
- L'ordine corrisponde al numero di componenti dinamici indipendenti (che è uguale al numero di condensatori le cui tensioni sono indipendenti, cioè non legate tra loro dalle equazioni del circuito, più il numero di induttori le cui correnti sono indipendenti)
- Nella maggior parte dei casi di interesse pratico l'ordine corrisponde al numero totale dei componenti dinamici, ma in alcuni casi particolari (**circuiti degeneri**) può risultare inferiore

5

Poli e zeri reali

- Dato che $\mathbf{N}(s)$ e $\mathbf{D}(s)$ sono polinomi a coefficienti reali, si possono avere poli e zeri reali e coppie di poli e di zeri complessi coniugati
- Se z_i o $p_i = 0$ i fattori corrispondenti si riducono a s
- Per z_i o p_i reale $\neq 0$ i fattori corrispondenti possono essere posti nella forma

$$(s - z_i) = \frac{1}{\tau_{z_i}} (1 + s\tau_{z_i})$$

$$(s - p_i) = \frac{1}{\tau_{p_i}} (1 + s\tau_{p_i})$$

dove

$$\tau_{z_i} = -\frac{1}{z_i} \quad \tau_{p_i} = -\frac{1}{p_i} \quad (\text{costanti di tempo})$$

6

Poli e zeri complessi coniugati

- I termini corrispondenti a due zeri complessi coniugati, $z_i = \alpha_i + j\beta_i$, $z_{i+1} = z_i^* = \alpha_i - j\beta_i$, possono essere posti nella forma

$$(s - z_i)(s - z_i^*) = (s - \alpha_i - j\beta_i)(s - \alpha_i + j\beta_i) = s^2 - 2\alpha_i s + \alpha_i^2 + \beta_i^2 = \\ = \omega_{0zi}^2 \left(1 + \frac{s}{Q_{zi} \omega_{0zi}} + \frac{s^2}{\omega_{0zi}^2} \right)$$

dove

$$\omega_{0zi} = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2} = |z_i| \quad \text{(pulsazione naturale)}$$

$$Q_{zi} = -\frac{\sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}}{2\alpha_i} = -\frac{|z_i|}{2 \operatorname{Re}[z_i]} \quad \text{(fattore di merito)}$$

- Analogamente i termini corrispondenti a due poli complessi coniugati possono essere posti nella forma

$$(s - p_i)(s - p_i^*) = \omega_{0pi}^2 \left(1 + \frac{s}{Q_{pi} \omega_{0pi}} + \frac{s^2}{\omega_{0pi}^2} \right)$$

7

Nota

- Si può notare che, affinché un termine quadratico del tipo

$$1 + \frac{s}{Q\omega_0} + \frac{s^2}{\omega_0^2}$$

corrisponda a una coppia di poli o zeri complessi coniugati, occorre che sia negativo il discriminante

$$\Delta = \frac{1}{Q^2 \omega_0^2} - \frac{4}{\omega_0^2} < 0$$

- ➔ Quindi deve essere soddisfatta la condizione $Q > \frac{1}{2}$

8

Fattorizzazione della funzione di trasferimento

- Complessivamente la f.d.t. può essere posta nella forma

$$\mathbf{H}(s) = K \cdot \frac{\prod_{\text{zeri nulli}} s \cdot \prod_{\text{zeri reali} \neq 0} (1 + s\tau_{zi}) \cdot \prod_{\text{zeri complessi}} \left(1 + \frac{s}{Q_{zi}\omega_{0zi}} + \frac{s^2}{\omega_{0zi}^2} \right)}{\prod_{\text{poli nulli}} s \cdot \prod_{\text{poli reali} \neq 0} (1 + s\tau_{pi}) \cdot \prod_{\text{poli complessi}} \left(1 + \frac{s}{Q_{pi}\omega_{0pi}} + \frac{s^2}{\omega_{0pi}^2} \right)}$$

- La risposta in frequenza può essere riottenuta sostituendo s con $j\omega$

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \cdot \frac{\prod_{\text{zeri nulli}} j\omega \cdot \prod_{\text{zeri reali} \neq 0} (1 + j\omega\tau_{zi}) \cdot \prod_{\text{zeri complessi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0zi}^2} + j \frac{\omega}{Q_{zi}\omega_{0zi}} \right)}{\prod_{\text{poli nulli}} j\omega \cdot \prod_{\text{poli reali} \neq 0} (1 + j\omega\tau_{pi}) \cdot \prod_{\text{poli complessi}} \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{0pi}^2} + j \frac{\omega}{Q_{pi}\omega_{0pi}} \right)}$$

9

Funzioni elementari

- La forma fattorizzata della funzione di trasferimento rende agevole la costruzione dei diagrammi di Bode, infatti
 - ♦ Il valore in dB del modulo di \mathbf{H} è dato dalla differenza tra le sommatorie dei valori in dB dei moduli dei fattori del numeratore (incluso K) e dei fattori del denominatore
 - ♦ L'argomento \mathbf{H} è dato dalla differenza tra le sommatorie degli argomenti dei fattori del numeratore (incluso K) e dei fattori del denominatore
- ➔ I diagrammi possono essere ottenuti sommando i contributi di termini corrispondenti alle **funzioni elementari**

$$\mathbf{H}(j\omega) = K$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = (j\omega)^{\pm 1}$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{\pm 1}$$

$$\mathbf{H}(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right)^{\pm 1}$$

10

Nota

- Per semplicità in seguito si assumerà sia i poli che gli zeri abbiano parte reale non positiva e, quindi, che le costanti τ_i e Q_i siano tutte positive
 - ◆ per quanto riguarda i poli questa condizione è sempre verificata se il circuito è stabile
 - ◆ per gli zeri la condizione è verificata nella maggior parte dei casi di interesse pratico
- Nel caso di zeri (o poli) con parte reale positiva
 - ◆ i diagrammi delle ampiezze sono identici a quelli per gli zeri (o poli) con parte reale positiva, a parte la sostituzione di τ con $|\tau|$ e Q con $|Q|$
 - ◆ i diagrammi delle fasi si possono ottenere ribaltando attorno all'asse delle ascisse quelli corrispondenti a τ o Q positivo

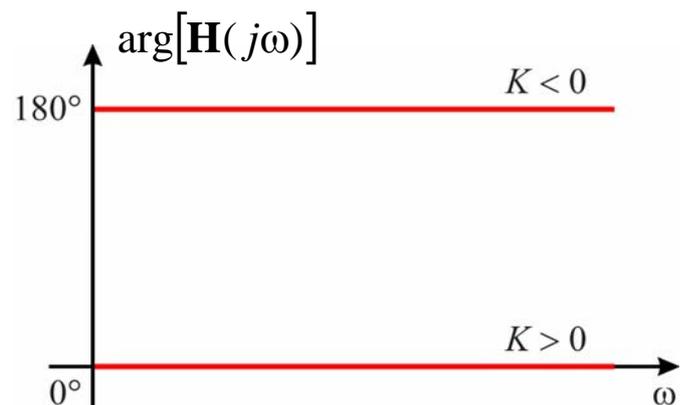
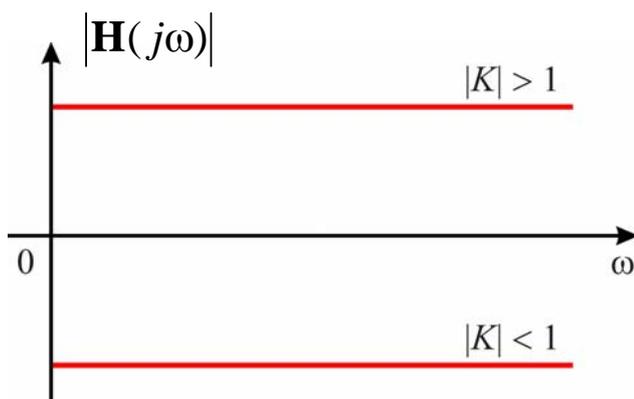
11

Fattore costante

$$\mathbf{H}(j\omega) = K$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10}(K)$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = \begin{cases} 0 & \text{per } K > 0 \\ 180^\circ & \text{per } K < 0 \end{cases}$$



12

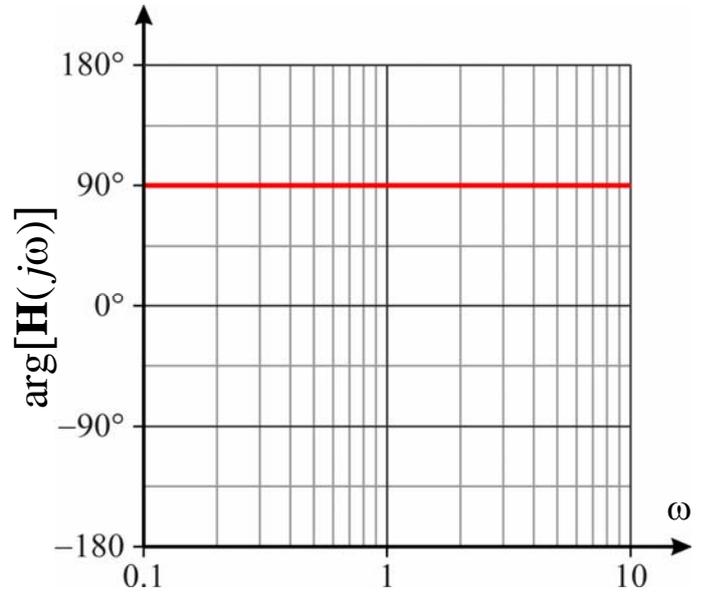
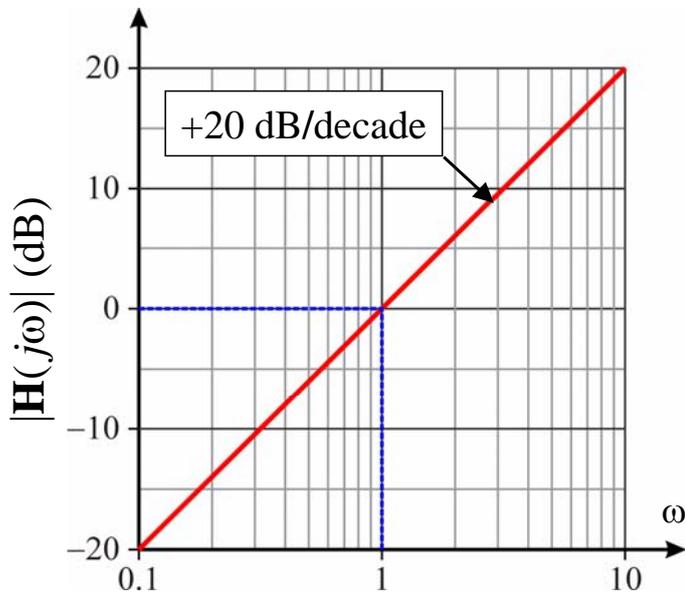
Zero nell'origine

$$\mathbf{H}(j\omega) = j\omega$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}(\omega)$$

$$\omega = 1 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = 90^\circ$$



13

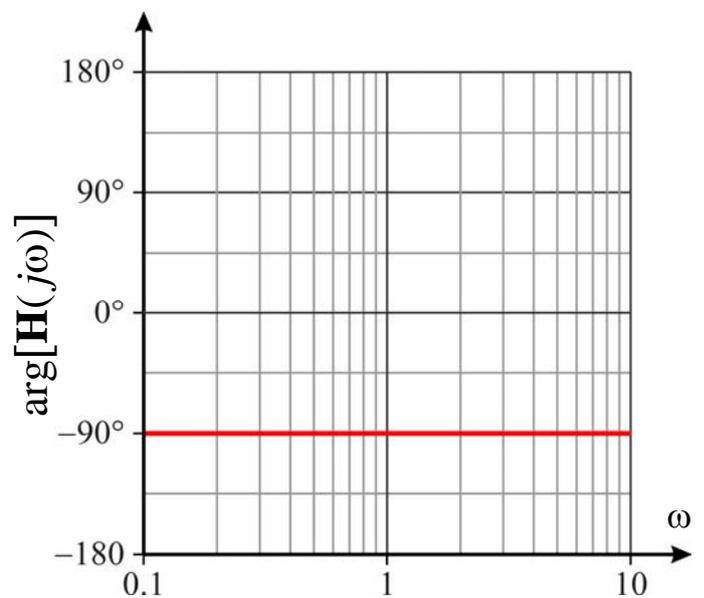
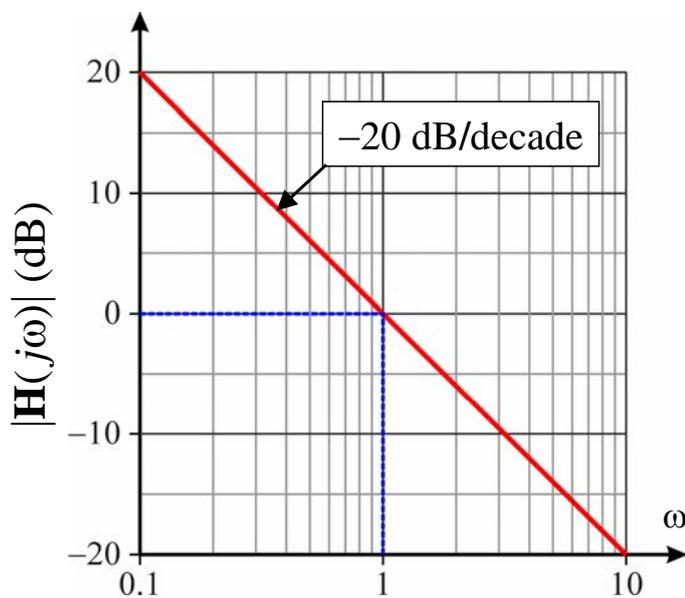
Polo nell'origine

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = -20\log_{10}(\omega)$$

$$\omega = 1 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 0 \text{ dB}$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = -90^\circ$$



14

Nota

- Le rette che rappresentano il modulo del termine relativo a uno zero o un polo nell'origine intersecano l'asse delle ascisse per $\omega = 1 \text{ rad/s}$
- Se sull'asse delle ascisse viene riportata la frequenza $f = \omega/(2\pi)$, l'attraversamento avviene per $f = 1/(2\pi) \approx 0.159 \text{ Hz}$
- Quindi per $f = 1 \text{ Hz}$ il valore del modulo è
 - ◆ nel caso dello zero nell'origine
 $20\log_{10}(2\pi) \approx 16 \text{ dB}$
 - ◆ nel caso del polo nell'origine
 $-20\log_{10}(2\pi) \approx -16 \text{ dB}$

15

Zero reale - ampiezza

$$\mathbf{H}(j\omega) = 1 + j\omega\tau$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10} \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$$

- Posto $\omega_0 = 1/\tau$, si possono individuare due asintoti

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20\log_{10} \sqrt{1} = 0$$

➔ retta orizzontale con ordinata nulla

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20\log_{10} \sqrt{\frac{\omega^2}{\omega_0^2}} = 20(\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_0)$$

➔ retta con pendenza +20 dB/decade (= +6 dB/ottava) che interseca l'asse delle ascisse per $\omega = \omega_0$

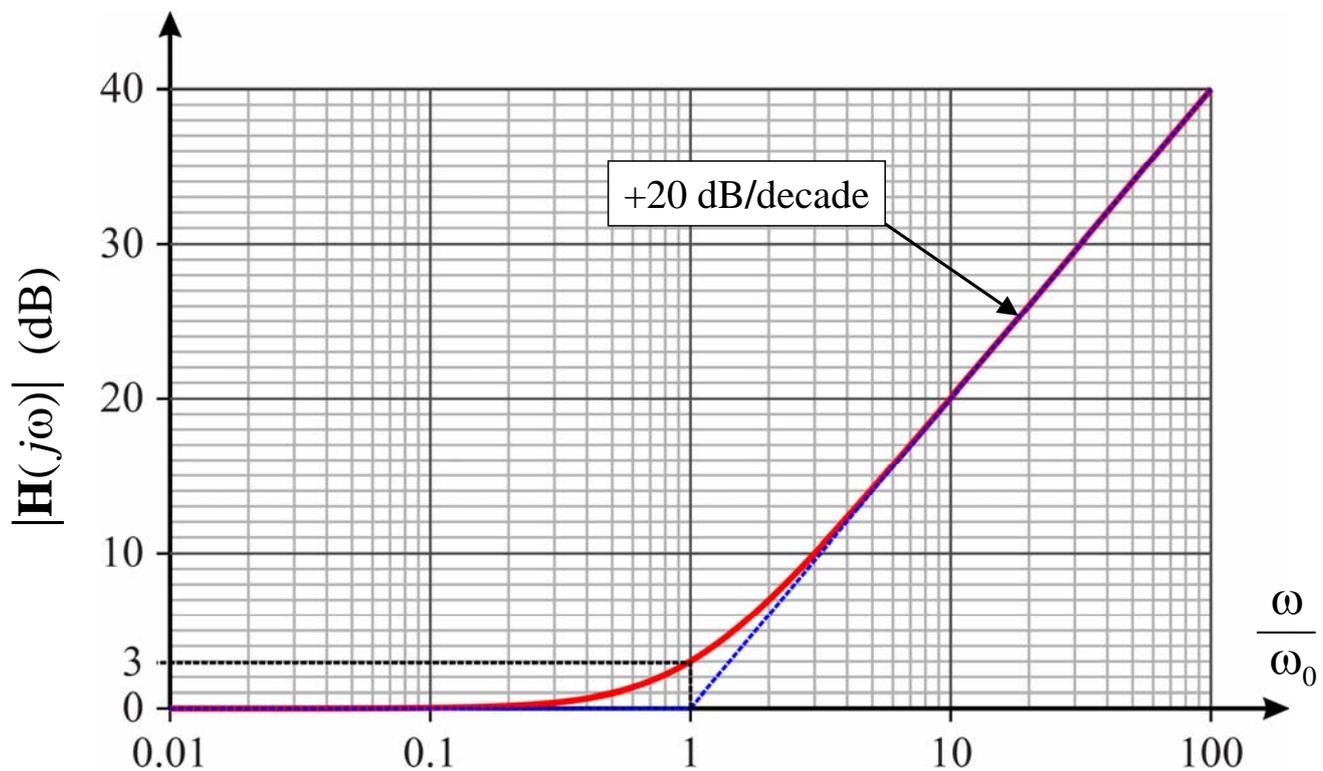
16

Zero reale - ampiezza

- L'andamento del modulo di \mathbf{H} può essere approssimato con un diagramma formato da due semirette che si incontrano per $\omega = \omega_0$ (**approssimazione asintotica**)
- Per $\omega = \omega_0$ il modulo di \mathbf{H} vale
$$|\mathbf{H}(j\omega_0)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{2} \approx 3 \text{ dB}$$
- Questo valore rappresenta anche il massimo errore introdotto dalla rappresentazione asintotica

17

Zero reale - ampiezza



18

Zero reale - fase

- $\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = \text{arctg}(\omega\tau)$

➔ Quindi risulta

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \text{arctg}(\omega\tau) = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{arctg}(\omega\tau) = 90^\circ$$

$$\text{arctg}(\omega_0\tau) = 45^\circ$$

- In questo caso si hanno due asintoti orizzontali
- L'andamento della fase può essere approssimato mediante una spezzata formata da due semirette orizzontali, corrispondenti agli asintoti, e da un segmento obliquo

19

Zero reale - fase

- Per tracciare il segmento obliquo si possono utilizzare vari criteri
- **Approssimazione 1:**
 - ◆ Si collegano i due asintoti mediante la retta tangente alla curva nel punto $\omega = \omega_0$
 - ◆ Si può verificare che le intersezioni di questa retta con gli asintoti si trovano in corrispondenza delle pulsazioni

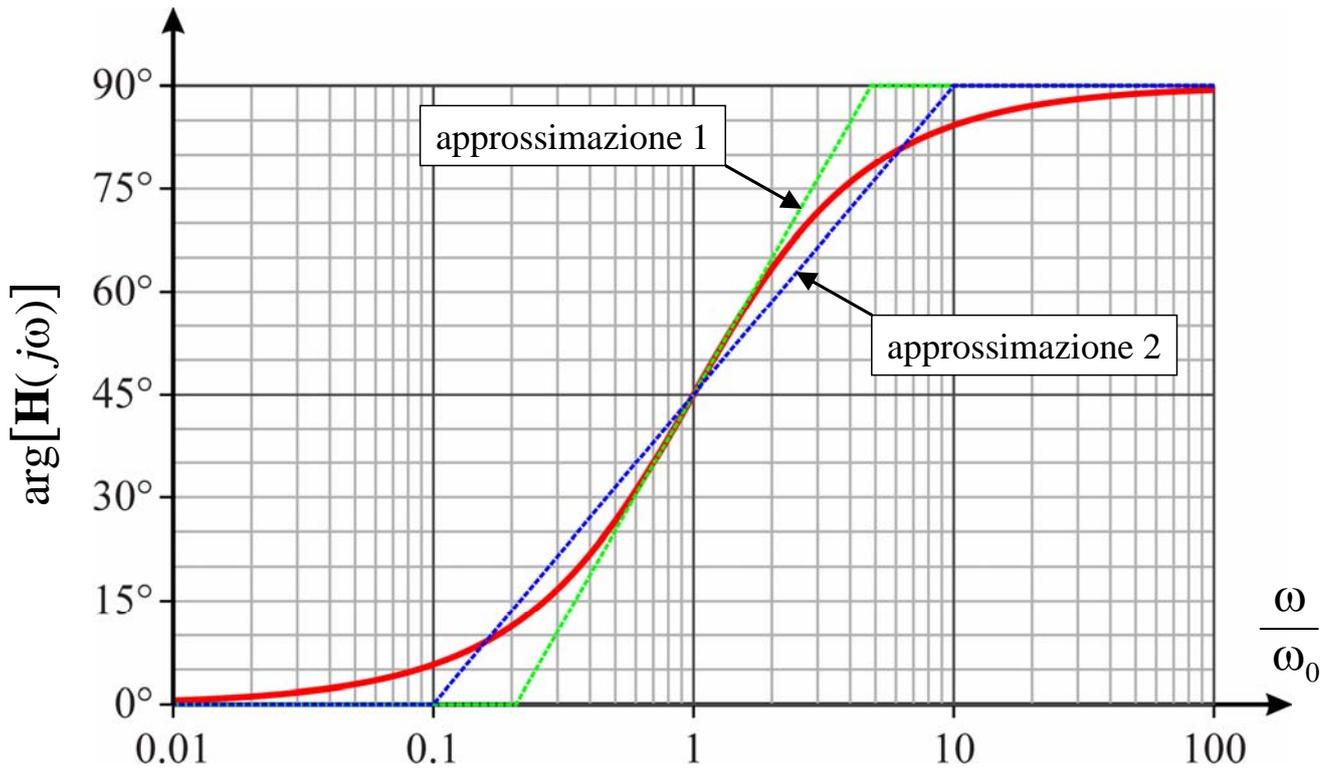
$$\omega_1 = \omega_0 e^{-\frac{\pi}{2}} \approx \frac{\omega_0}{4.81}$$

$$\omega_2 = \omega_0 e^{\frac{\pi}{2}} \approx 4.81\omega_0$$

- **Approssimazione 2:**
 - ◆ Si collegano gli asintoti mediante la retta che li interseca per $\omega_1 = 0.1\omega_0$ $\omega_2 = 10\omega_0$
 - ◆ In questo modo il massimo scostamento risulta di circa 5.8° ed è inferiore al massimo errore che si ottiene con l'approssimazione 1

20

Zero reale - fase



21

Polo reale

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

- Dato che

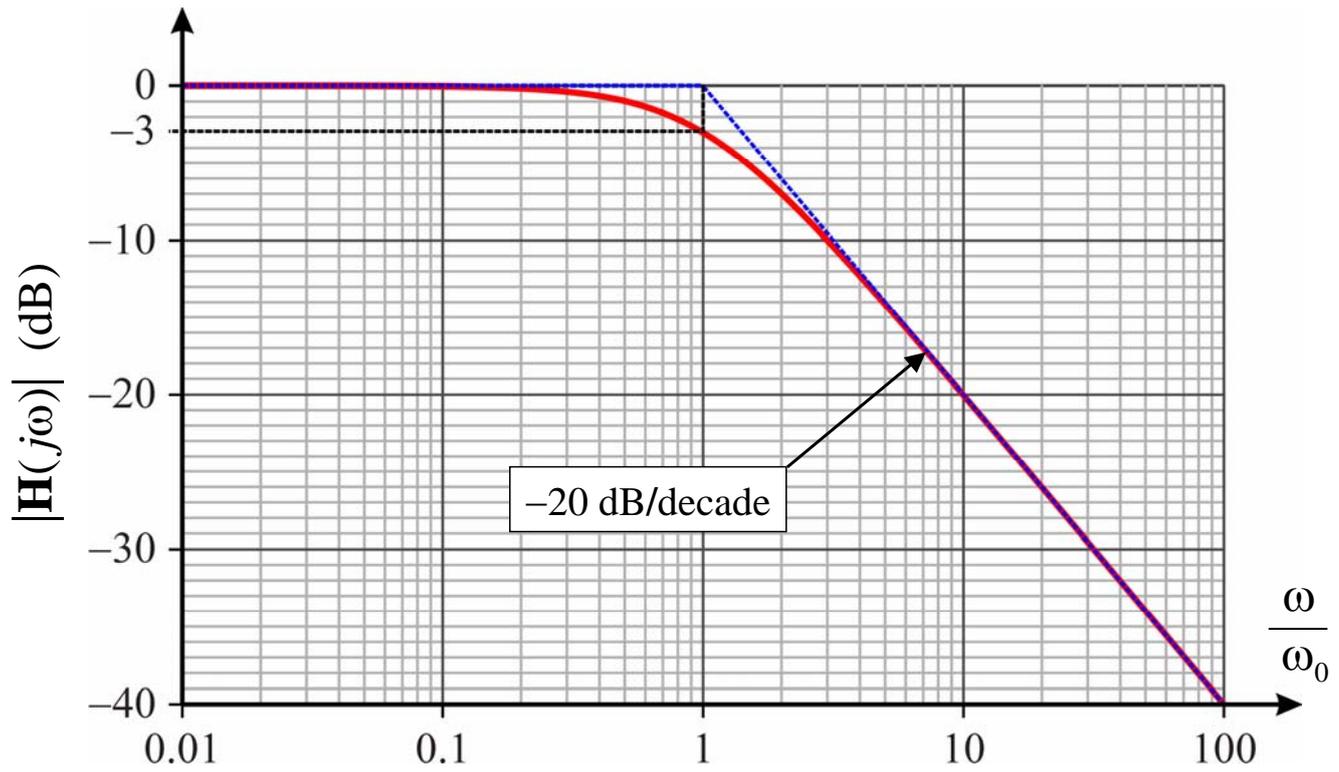
$$20 \log_{10} \left(\frac{1}{|1 + j\omega\tau|} \right) = -20 \log_{10} (|1 + j\omega\tau|)$$

$$\arg \left(\frac{1}{1 + j\omega\tau} \right) = -\arg(1 + j\omega\tau)$$

i diagrammi del modulo e dell'argomento di questa funzione si ottengono ribaltando attorno all'asse delle ascisse i diagrammi corrispondenti alla funzione $1 + j\omega\tau$

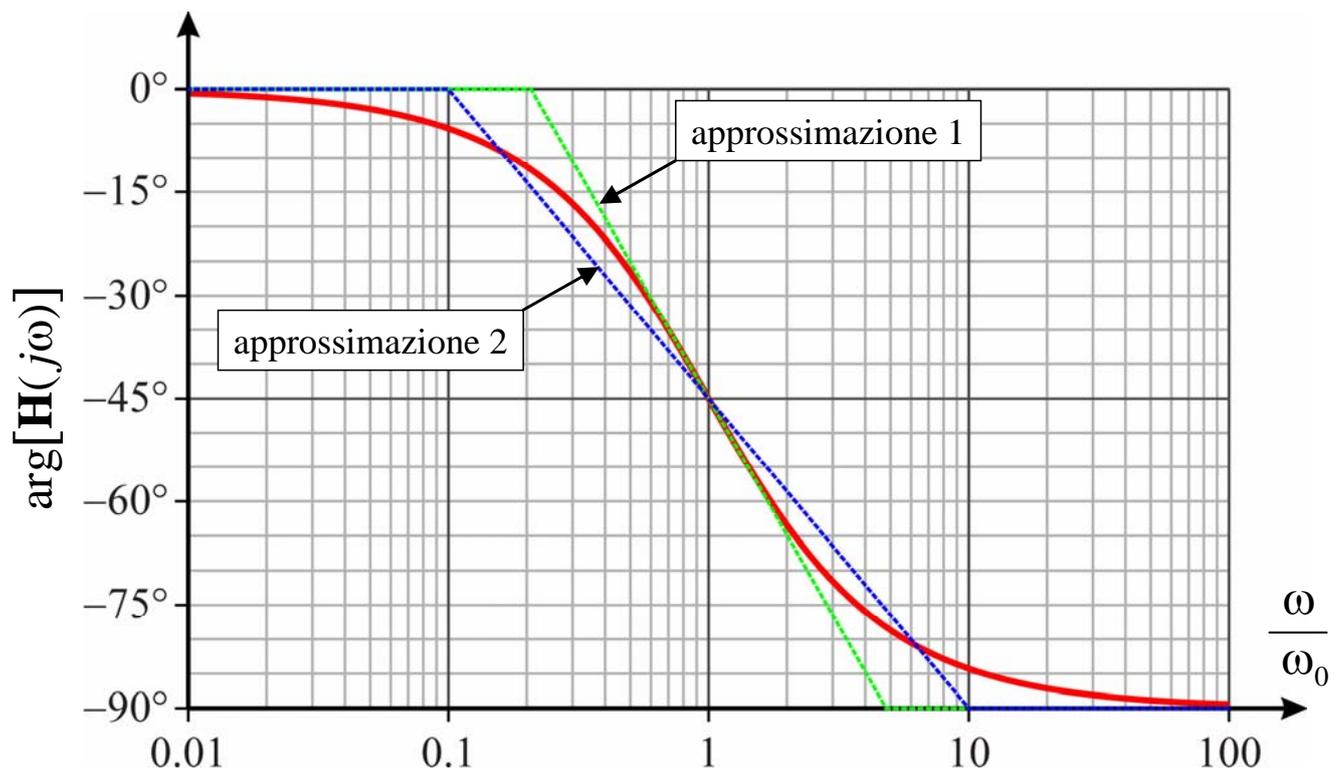
22

Polo reale - ampiezza



23

Polo reale - fase



24

Zeri complessi coniugati - ampiezza

$$\mathbf{H}(j\omega) = 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}$$

$$|\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}$$

- Si individuano due asintoti

$$\omega \ll \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{1} = 0$$

➔ retta orizzontale con ordinata nulla

$$\omega \gg \omega_0 \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)|_{\text{dB}} \approx 20 \log_{10} \sqrt{\frac{\omega^4}{\omega_0^4}} = 40(\log_{10} \omega - \log_{10} \omega_0)$$

➔ retta con pendenza +40 dB/decade (+12 dB/ottava) che interseca l'asse delle ascisse per $\omega = \omega_0$

25

Zeri complessi coniugati - ampiezza

- In questo caso, in prossimità della pulsazione ω_0 l'andamento del modulo di \mathbf{H} può discostarsi sensibilmente dal diagramma asintotico
- In particolare la curva può presentare un minimo se esiste un valore reale ω_M della pulsazione per cui si annulla la derivata di $|\mathbf{H}|$

$$\frac{d}{d\omega} \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2} = 0 \Rightarrow \omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

- ◆ Questo avviene se

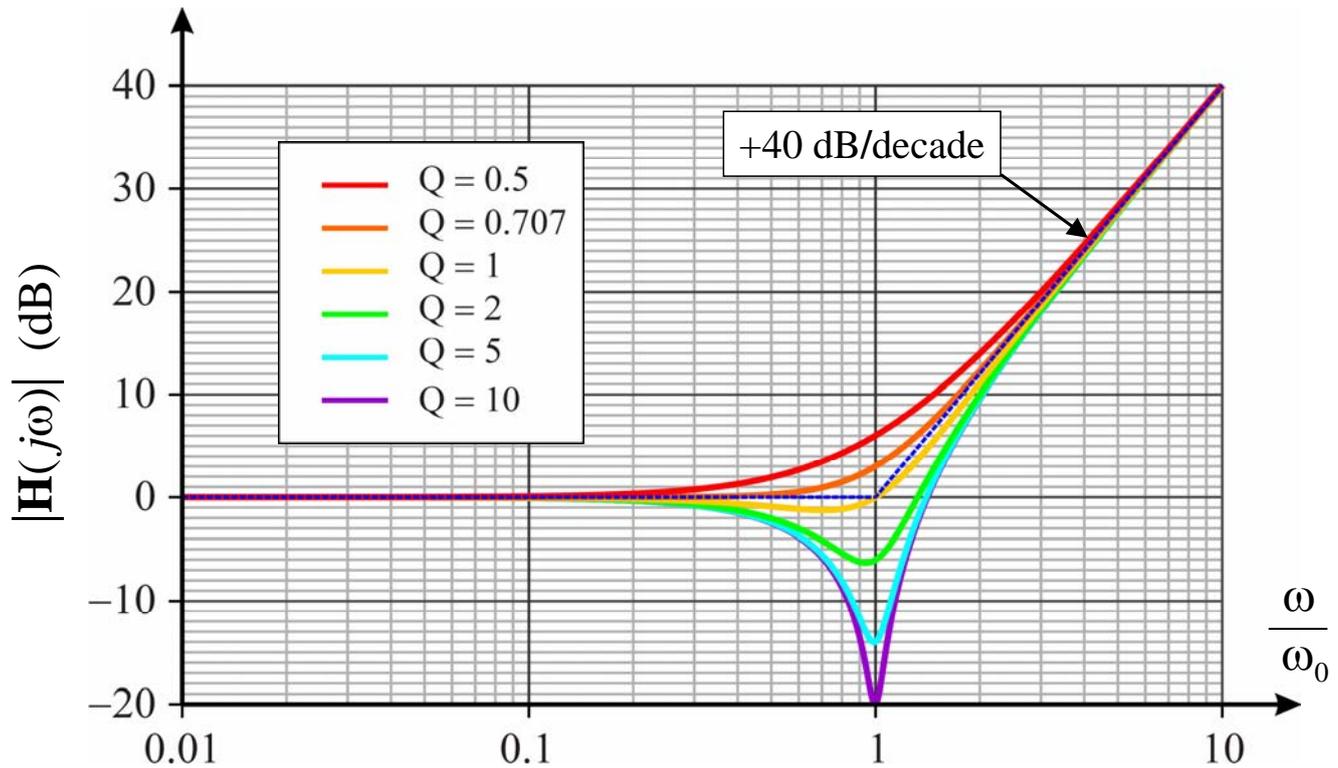
$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Rightarrow Q > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- ◆ In questo caso si ha anche

$$|\mathbf{H}(j\omega_M)| = \frac{1}{Q} \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

26

Zeri complessi coniugati - ampiezza



27

Zeri complessi coniugati - fase

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega)] = \begin{cases} \arctg\left[\frac{\omega_0\omega}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] & \text{per } \omega < \omega_0 \\ 90^\circ & \text{per } \omega = \omega_0 \\ \arctg\left[\frac{\omega_0\omega}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)}\right] + 180^\circ & \text{per } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

- Quindi

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \arg[\mathbf{H}(j\omega)] = 0^\circ$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg[\mathbf{H}(j\omega)] = 180^\circ$$

$$\arg[\mathbf{H}(j\omega_0)] = 90^\circ$$

- Anche in questo caso si hanno due asintoti orizzontali

28

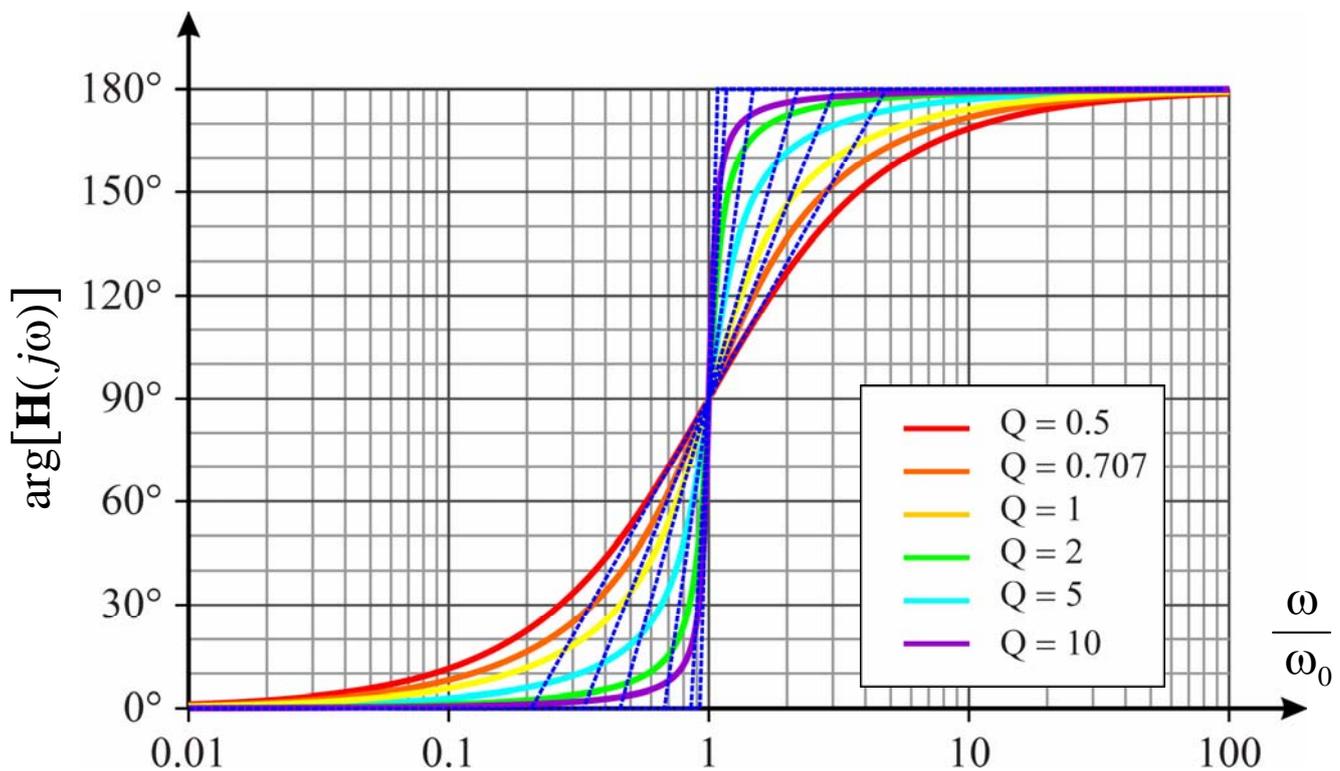
Zeri complessi coniugati - fase

- Si può approssimare l'andamento della fase mediante una spezzata formata collegando i due asintoti con un segmento obliquo, che può essere tracciato in più modi
- Per esempio si può utilizzare la retta tangente alla curva per $\omega = \omega_0$
- Si può dimostrare che questa retta interseca gli asintoti per

$$\omega_1 = \omega_0 e^{-\frac{\pi}{2}\zeta} \approx 4.81^{-\zeta} \omega_0 \qquad \omega_2 = \omega_0 e^{\frac{\pi}{2}\zeta} \approx 4.81^{\zeta} \omega_0$$

29

Zeri complessi coniugati - fase



30

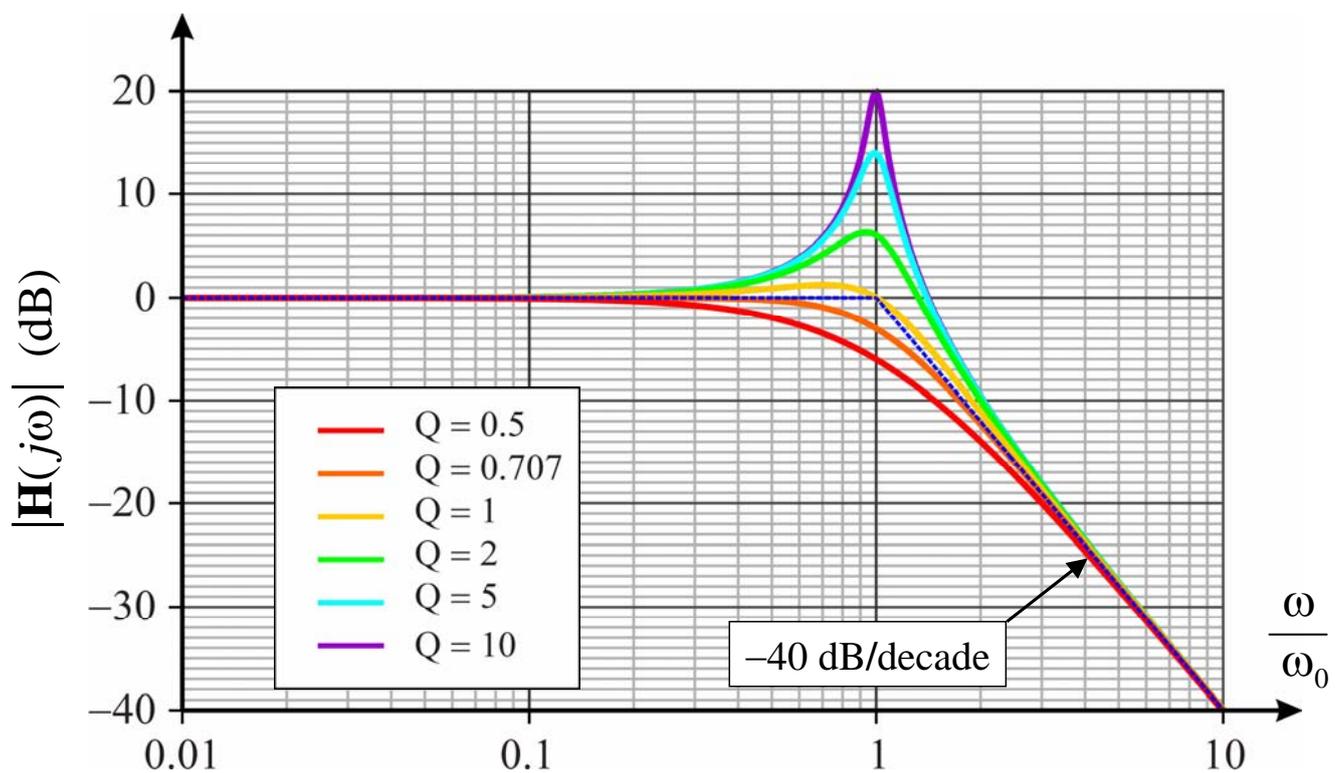
Poli complessi coniugati

$$\mathbf{H}(j\omega) = \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0} \right)^{-1}$$

- I diagrammi del modulo e della fase di $\mathbf{H}(j\omega)$ possono essere ottenuti ribaltando attorno all'asse delle ascisse i grafici ottenuti per la funzione precedente

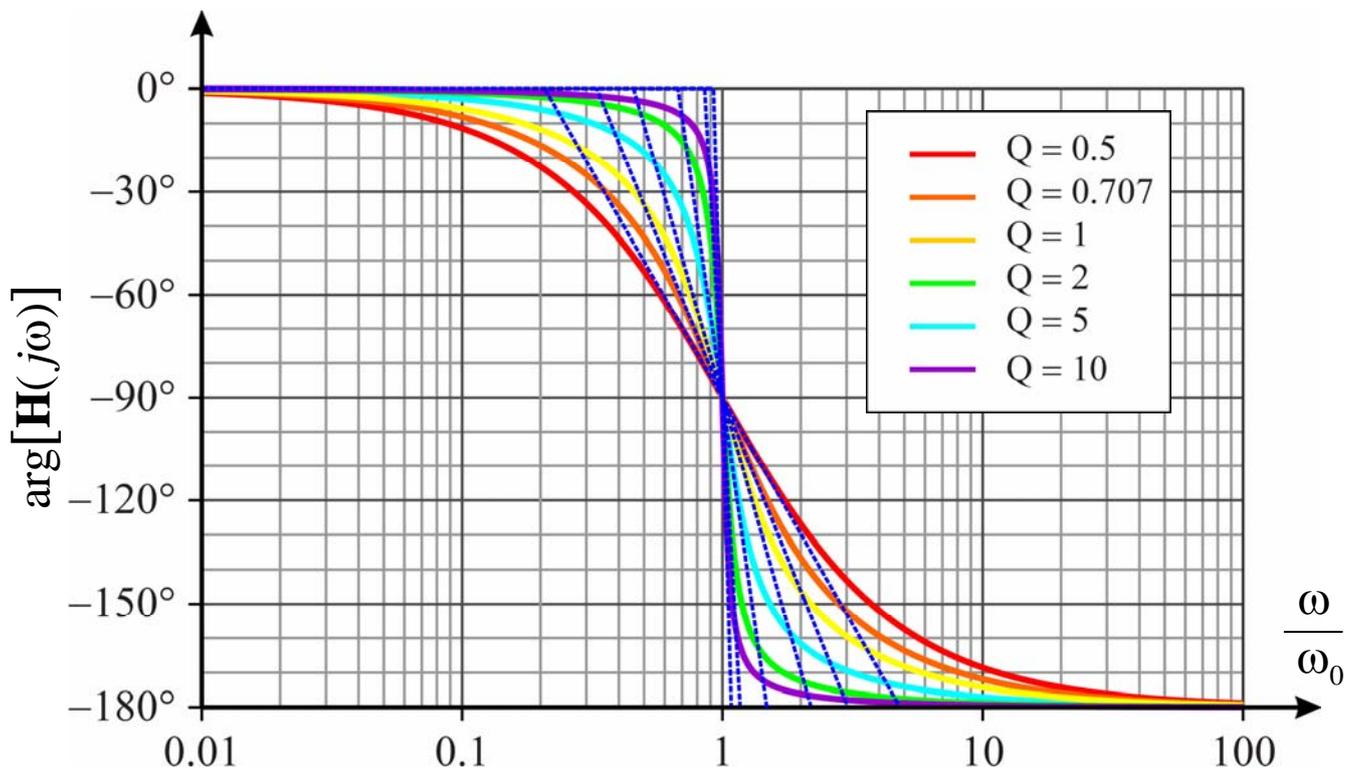
31

Poli complessi coniugati - ampiezza



32

Poli complessi coniugati - fase



33

Esempio 1

- Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$\mathbf{H}(s) = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot s}{2s^2 + 2.04 \cdot 10^4 s + 4 \cdot 10^6}$$

- La f.d.t. ha uno zero nell'origine e due poli

$$p_1, p_2 = \frac{-1.02 \cdot 10^4 \pm \sqrt{1.0404 \cdot 10^8 - 8 \cdot 10^6}}{2} = \frac{-1.02 \cdot 10^4 \pm 0.98 \cdot 10^4}{2} = \begin{cases} -200 \\ -10^4 \end{cases}$$

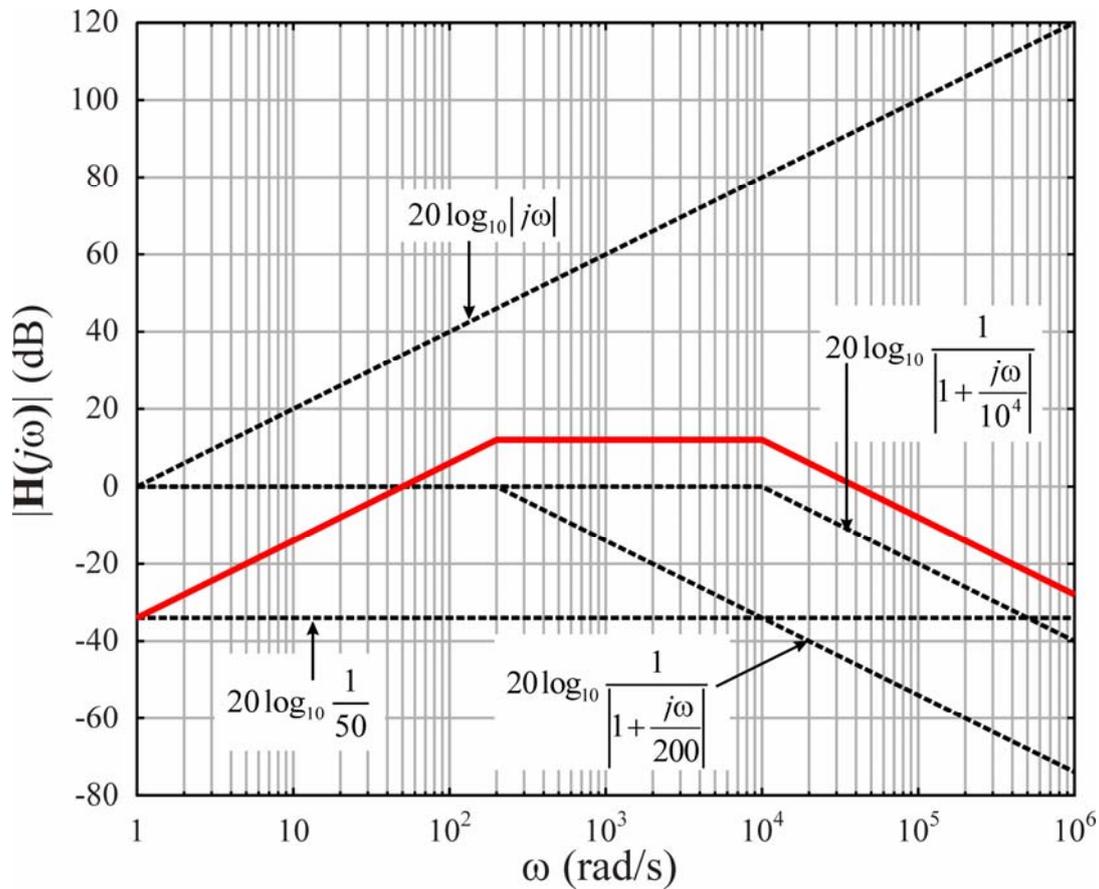
- Si riscrive la funzione in forma canonica

$$\mathbf{H}(s) = \frac{8 \cdot 10^4 \cdot s}{2(s+200)(s+10^4)} = \frac{8 \cdot 10^4}{2 \cdot 200 \cdot 10^4} \cdot \frac{s}{\left(1 + \frac{s}{200}\right) \left(1 + \frac{s}{10^4}\right)} = \frac{1}{50} \cdot \frac{s}{\left(1 + \frac{s}{200}\right) \left(1 + \frac{s}{10^4}\right)}$$

- Si tracciano i diagrammi asintotici dei moduli e delle fasi delle funzioni $1/50$, $j\omega$, $1/(1+j\omega/200)$, $1/(1+j\omega/10^4)$ e si sommano i loro contributi

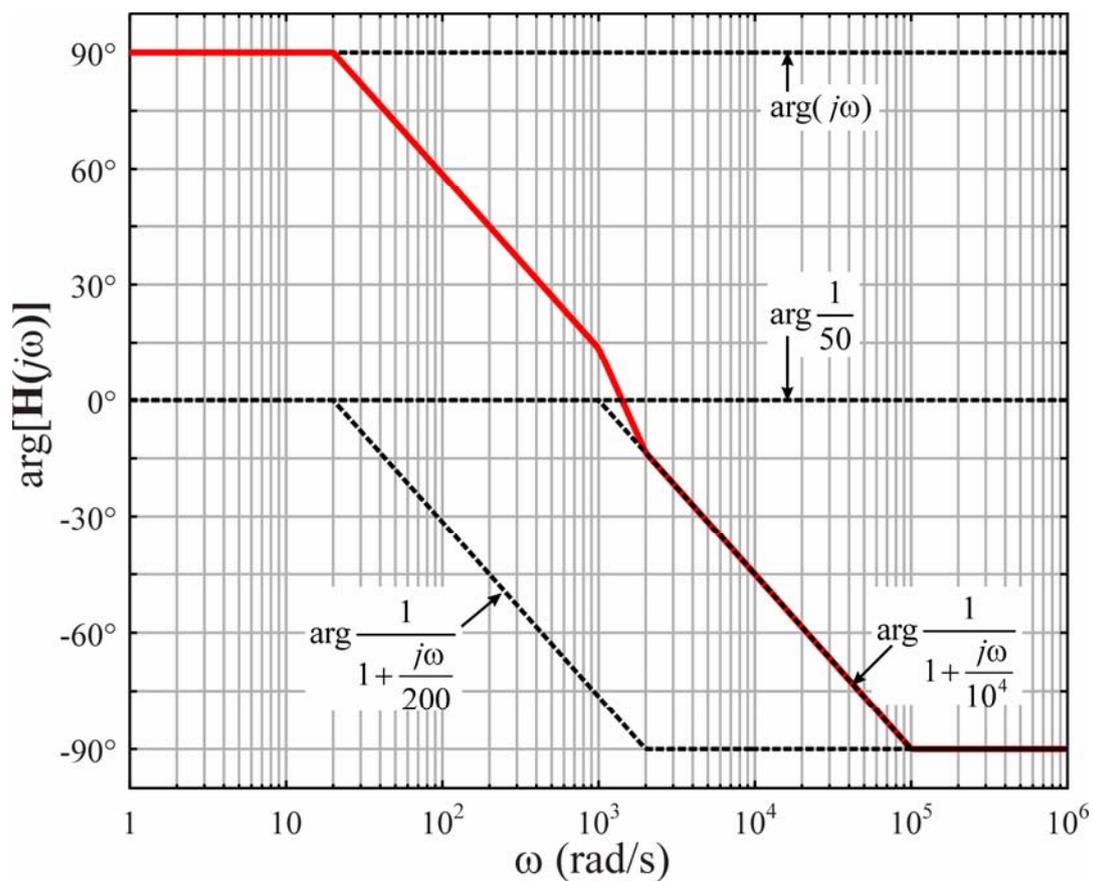
34

Esempio 1 – diagramma del modulo



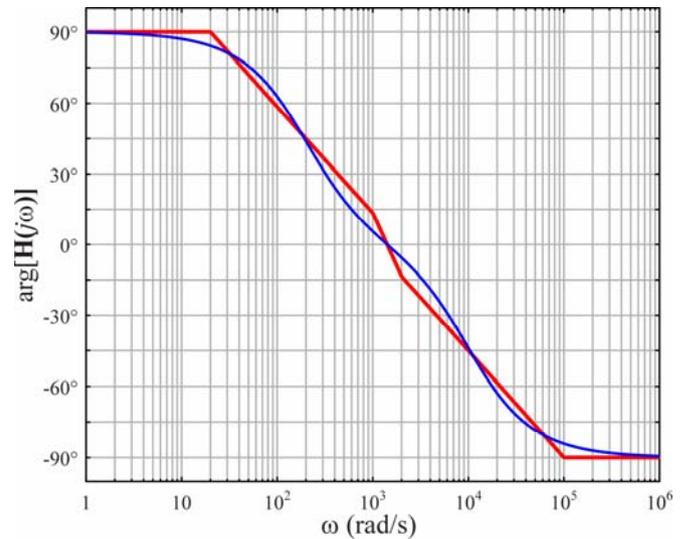
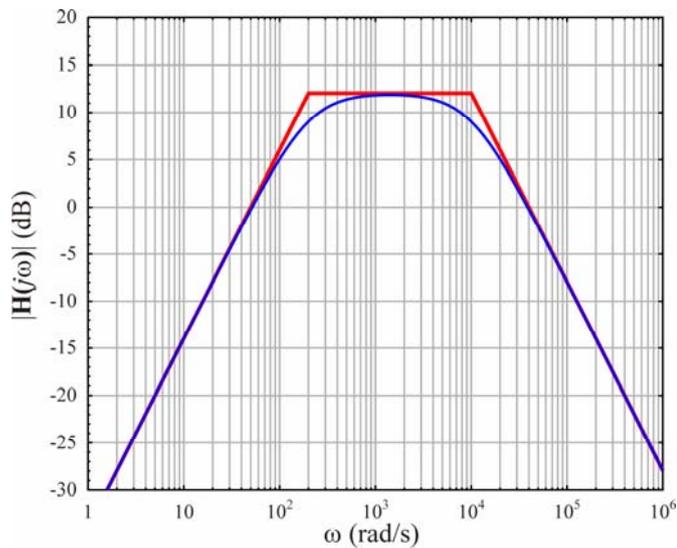
35

Esempio 1 – diagramma della fase



36

Esempio 1 – confronto con i diagrammi esatti



37

Esempio 2

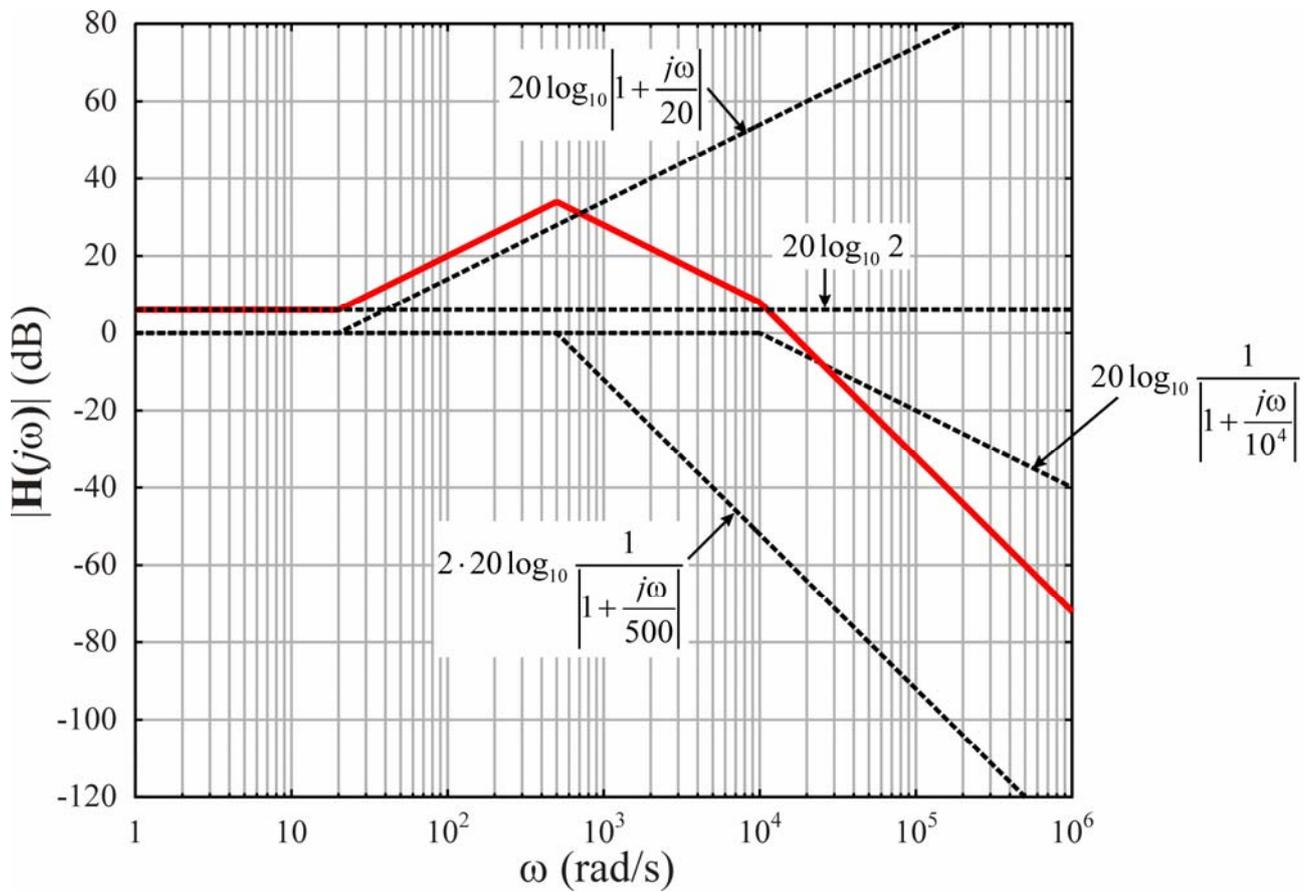
- Tracciare i diagrammi di Bode della f.d.t.

$$\mathbf{H}(s) = 2 \cdot \frac{\left(1 + \frac{s}{20}\right)}{\left(1 + \frac{s}{500}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{10^4}\right)}$$

- La f.d.t ha uno zero per $s = -20$, un polo semplice per $s = -10^4$ e un polo doppio per $s = -500$
- Si tracciano i diagrammi asintotici dei moduli e delle fasi delle funzioni 2 , $1 + j\omega/20$, $1/(1 + j\omega/500)^2$, $1/(1 + j\omega/10^4)$ e si sommano i contributi
- I grafici di $1/(1 + j\omega/500)^2$ si ottengono moltiplicando per 2 il modulo e l'argomento di $1/(1 + j\omega/500)$

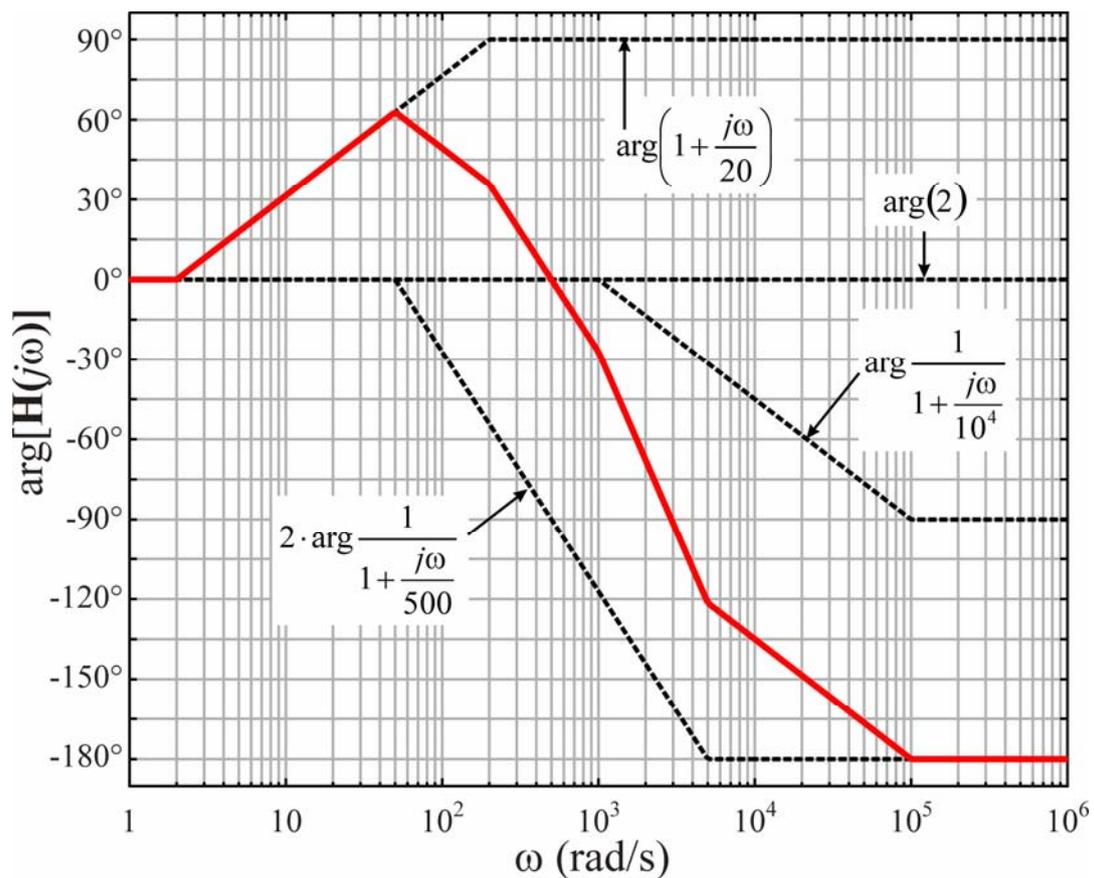
38

Esempio 2 – diagramma del modulo



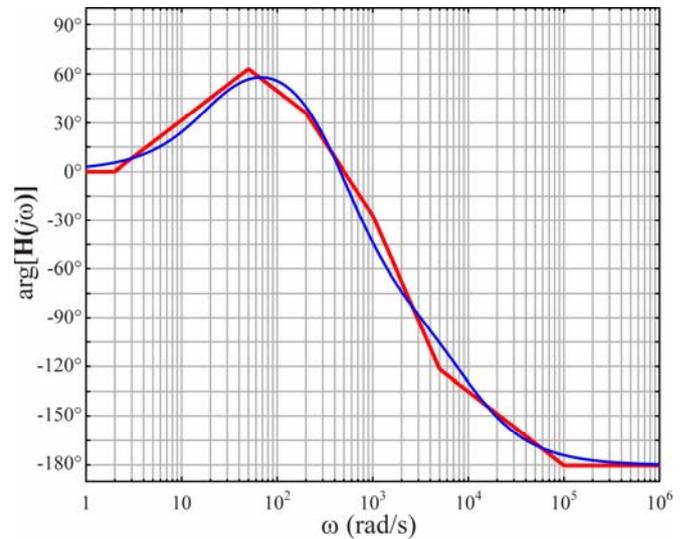
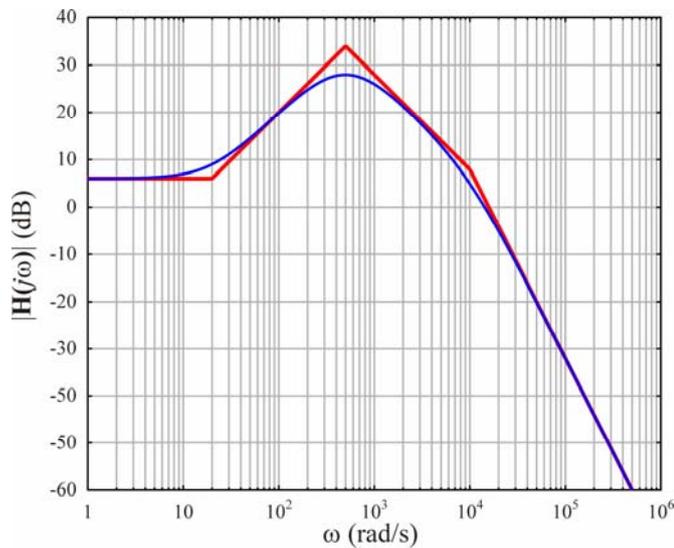
39

Esempio 2 – diagramma della fase



40

Esempio 2 – confronto con i diagrammi esatti



41

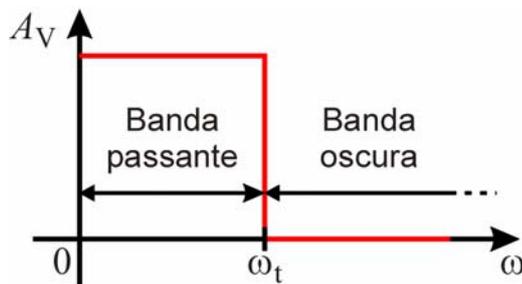
Filtri

- Un filtro è una rete a due porte in grado di trasferire in uscita segnali con frequenze comprese all'interno di predeterminati intervalli di frequenze (**bande passanti**) e di eliminare i segnali alle altre frequenze (**bande oscure**)
- Esistono quattro tipi principali di filtri
 - ◆ **Filtro passa-basso**: elimina i segnali aventi frequenza maggiore di una frequenza di taglio $f_t = 2\pi\omega_t$
 - ◆ **Filtro passa-alto**: elimina i segnali aventi frequenza minore di una frequenza di taglio $f_t = 2\pi\omega_t$
 - ◆ **Filtro passa-banda**: elimina i segnali aventi frequenza all'esterno dell'intervallo compreso tra le frequenze $f_{t1} = 2\pi\omega_{t1}$ e $f_{t2} = 2\pi\omega_{t2}$
 - ◆ **Filtro elimina-banda**: elimina i segnali aventi frequenza all'interno dell'intervallo compreso tra le frequenze $f_{t1} = 2\pi\omega_{t1}$ e $f_{t2} = 2\pi\omega_{t2}$

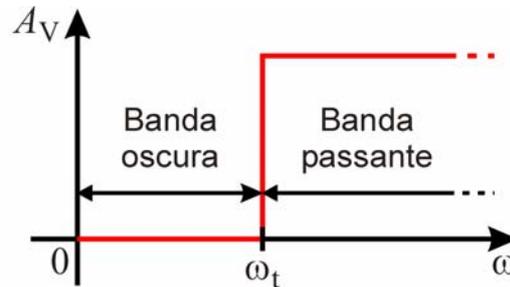
42

Filtri ideali

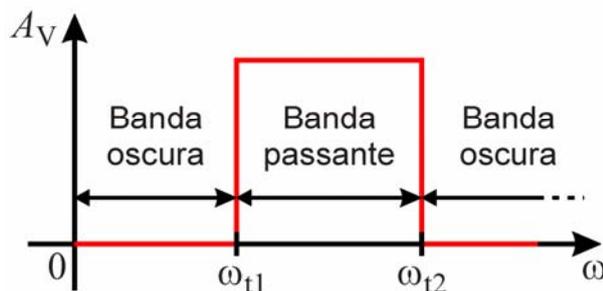
Passa-basso



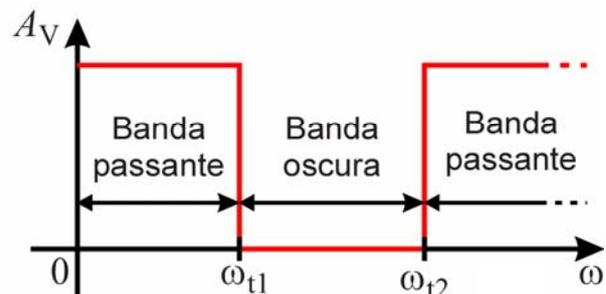
Passa-alto



Passa-banda



Elimina-banda



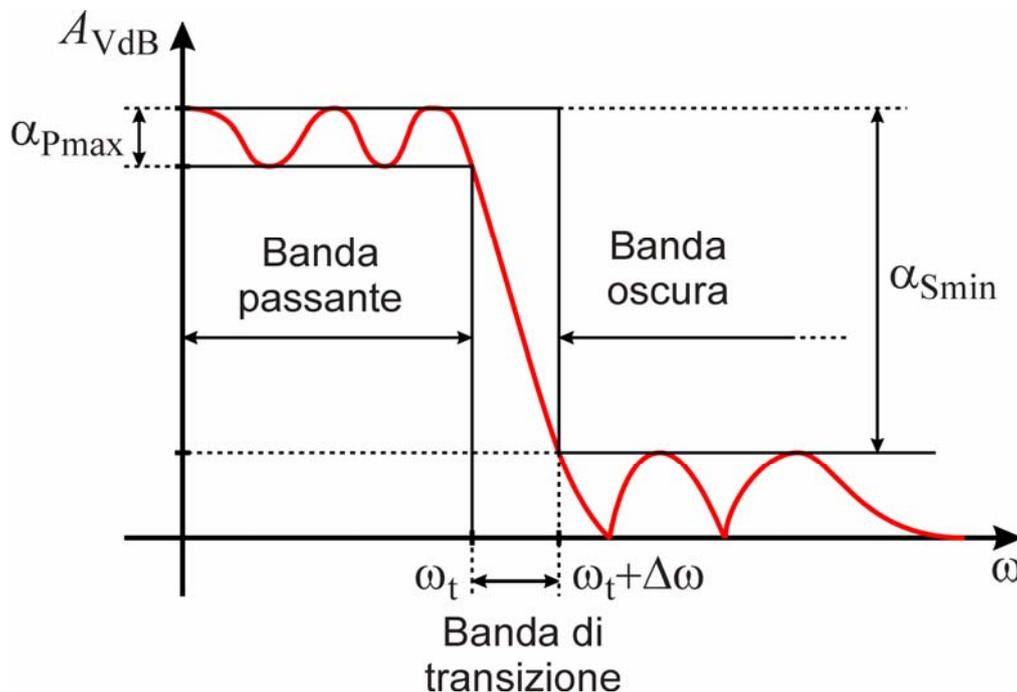
43

Filtri realizzabili

- Un filtro ideale dovrebbe avere guadagno costante nelle bande passanti e guadagno nullo nelle bande oscure, quindi la risposta in frequenza dovrebbe avere un andamento “a gradini”
- Funzioni di trasferimento di questo tipo però non sono fisicamente realizzabili
- In un filtro fisicamente realizzabile
 - ◆ La transizione tra banda passante e banda oscura non può essere a gradino, ma si deve ammettere che avvenga in un intervallo di ampiezza $\Delta\omega > 0$ (**banda di transizione**)
 - ◆ Non si può ottenere un guadagno costante in tutta la banda passante, ma si deve ammettere una deviazione α_{Pmax} (**massima attenuazione in banda passante**)
 - ◆ Analogamente, non si può ottenere un guadagno identicamente nullo in tutta la banda oscura, ma si deve accettare che l'attenuazione non scenda al di sotto di un valore finito α_{Smin} (**minima attenuazione in banda oscura**)

44

Filtri realizzabili



45

Filtri del primo e del secondo ordine

- Di seguito verranno prese in esame le funzioni di trasferimento dei filtri più semplici, cioè le funzioni del primo e del secondo ordine
- Nel caso di funzioni del primo ordine, cioè con un solo polo, si comportano di tipo
 - ◆ passa-basso se la f.d.t. non ha zeri
 - ◆ passa-alto se la f.d.t. ha uno zero nell'origine
- Nel caso di una f.d.t. del secondo ordine con poli complessi coniugati si ha un comportamento di tipo
 - ◆ passa-basso se la f.d.t. non ha zeri
 - ◆ passa-banda se la f.d.t. ha uno zero nell'origine
 - ◆ passa-alto se la f.d.t. ha due zeri nell'origine
 - ◆ elimina-banda se la f.d.t. ha due zeri immaginari coniugati (con pulsazione uguale a quella dei poli)
- Un filtro di ordine $n > 2$ può essere ottenuto collegando in cascata
 - ◆ $n/2$ filtri del secondo ordine se n è pari
 - ◆ un filtro del primo ordine e $n/2$ filtri del secondo ordine se n è dispari

46

Filtro passa-basso del primo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

cioè con un polo e priva di zeri, corrisponde a un filtro passa-basso

- Il diagramma asintotico di $|\mathbf{H}(j\omega)|$ è costituito da un asintoto orizzontale di ordinata $20\log_{10}|K|$ (che rappresenta il **guadagno in continua**) e da un asintoto con pendenza -20 dB/decade a partire da $\omega = \omega_0 = 1/\tau$
- Per $\omega = \omega_0$ il modulo della f.d.t. vale

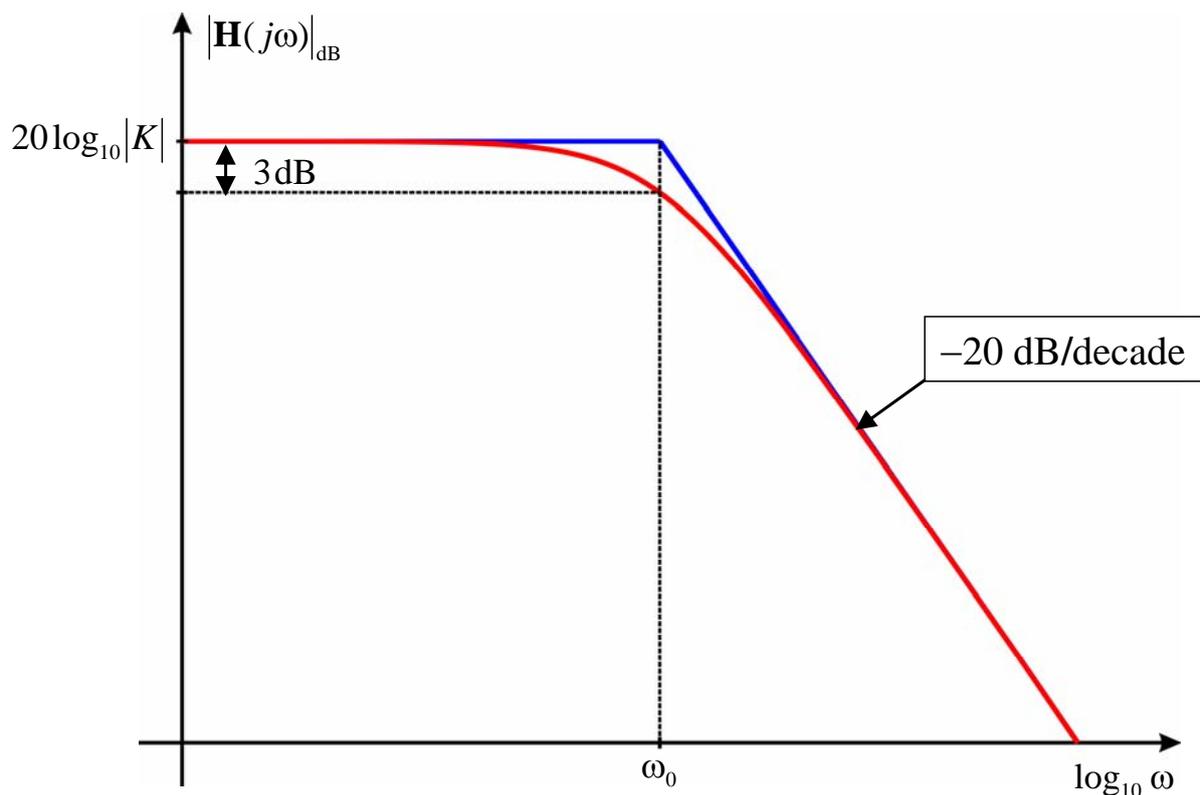
$$H(j\omega_0) = \frac{|K|}{\sqrt{2}}$$

e quindi è inferiore di 3 dB al guadagno in continua

- La pulsazione ω_0 è assunta convenzionalmente come **pulsazione di taglio del filtro**

47

Filtro passa-basso del primo ordine



48

Esempi di filtri passa-basso del primo ordine

- La f.d.t. del circuito RC è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = RC \quad (K = 1)$$

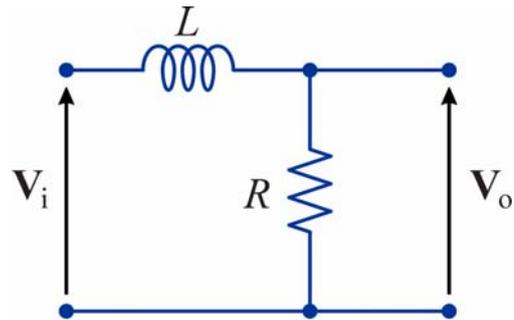
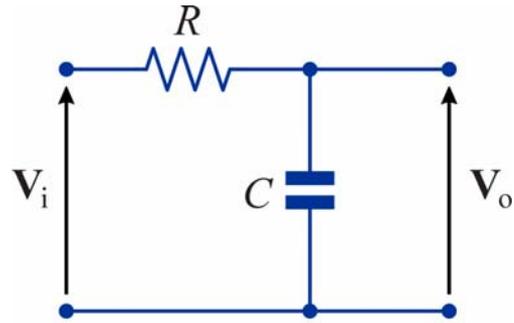
- La f.d.t. del circuito RL è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = \frac{R}{L} \quad (K = 1)$$

- Per entrambi i circuiti il guadagno in continua è $K = 1$ (= 0 dB)



49

Filtro passa-alto del primo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{j\omega}{1 + j\omega\tau}$$

cioè con un polo e uno zero, corrisponde a un filtro passa-alto

- Il diagramma asintotico di $|\mathbf{H}(j\omega)|$ è costituito da un asintoto con pendenza +20 dB/decade e da un asintoto orizzontale di ordinata $20\log_{10}(|K|\omega_0)$ (che rappresenta il **guadagno in ad alta frequenza**) a partire da $\omega = \omega_0 = 1/\tau$
- Per $\omega = \omega_0$ il modulo della f.d.t. vale

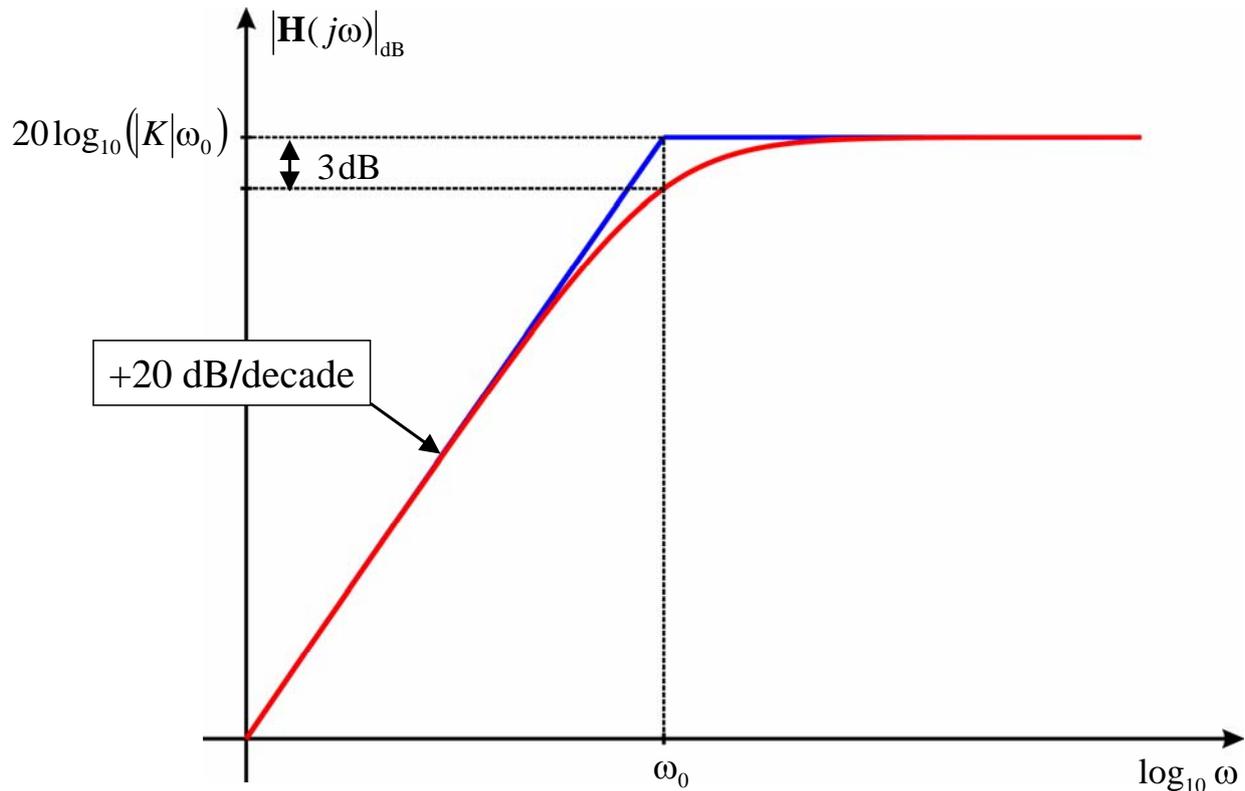
$$H(j\omega_0) = \frac{|K|\omega_0}{\sqrt{2}}$$

e quindi è inferiore di 3 dB al guadagno ad alta frequenza

- La pulsazione ω_0 è assunta convenzionalmente come **pulsazione di taglio del filtro**

50

Filtro passa-alto del primo ordine



51

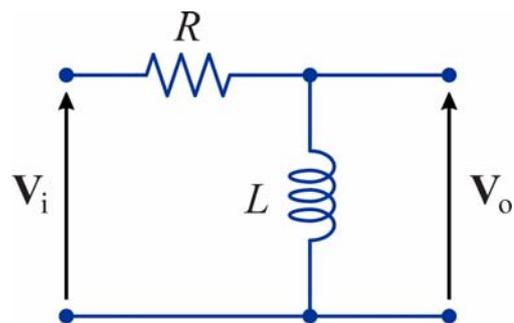
Esempi di filtri passa-alto del primo ordine

- La f.d.t. del circuito RL è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = K \frac{j\omega}{1 + j\omega\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = \frac{L}{R} \quad K = \frac{L}{R} = \tau$$

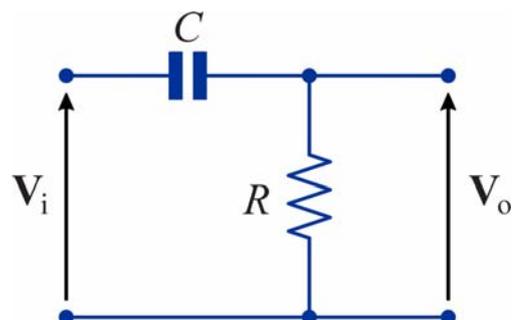


- La f.d.t. del circuito RC è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = K \frac{j\omega}{1 + j\omega\tau}$$

dove

$$\tau = \frac{1}{\omega_0} = RC \quad K = RC = \tau$$



- Per entrambi i circuiti il guadagno ad alta frequenza è $K\omega_0 = 1$ ($= 0 \text{ dB}$)

52

Filtro passa-basso del secondo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

cioè con due poli complessi coniugati e priva di zeri, corrisponde a un filtro passa-basso

- Il diagramma asintotico di $|\mathbf{H}(j\omega)|$ è costituito da un asintoto orizzontale di ordinata $20\log_{10}|K|$ (che rappresenta il **guadagno in continua**) e da un asintoto con pendenza -40 dB/decade a partire da $\omega = \omega_0$
- Per $\omega = \omega_0$ si ha $|\mathbf{H}(j\omega_0)| = |K|Q$, quindi, in particolare,
 - per $Q = 1/2$ (cioè quando i poli diventano reali coincidenti) il guadagno per $\omega = \omega_0$ è inferiore di 6 dB al guadagno in continua
 - per $Q = \sqrt{2}/2$ il guadagno per $\omega = \omega_0$ è inferiore di 3 dB al guadagno in continua

53

Filtro passa-basso del secondo ordine

- Per $Q > \sqrt{2}/2$ il modulo della f.d.t. ha un picco in corrispondenza della pulsazione

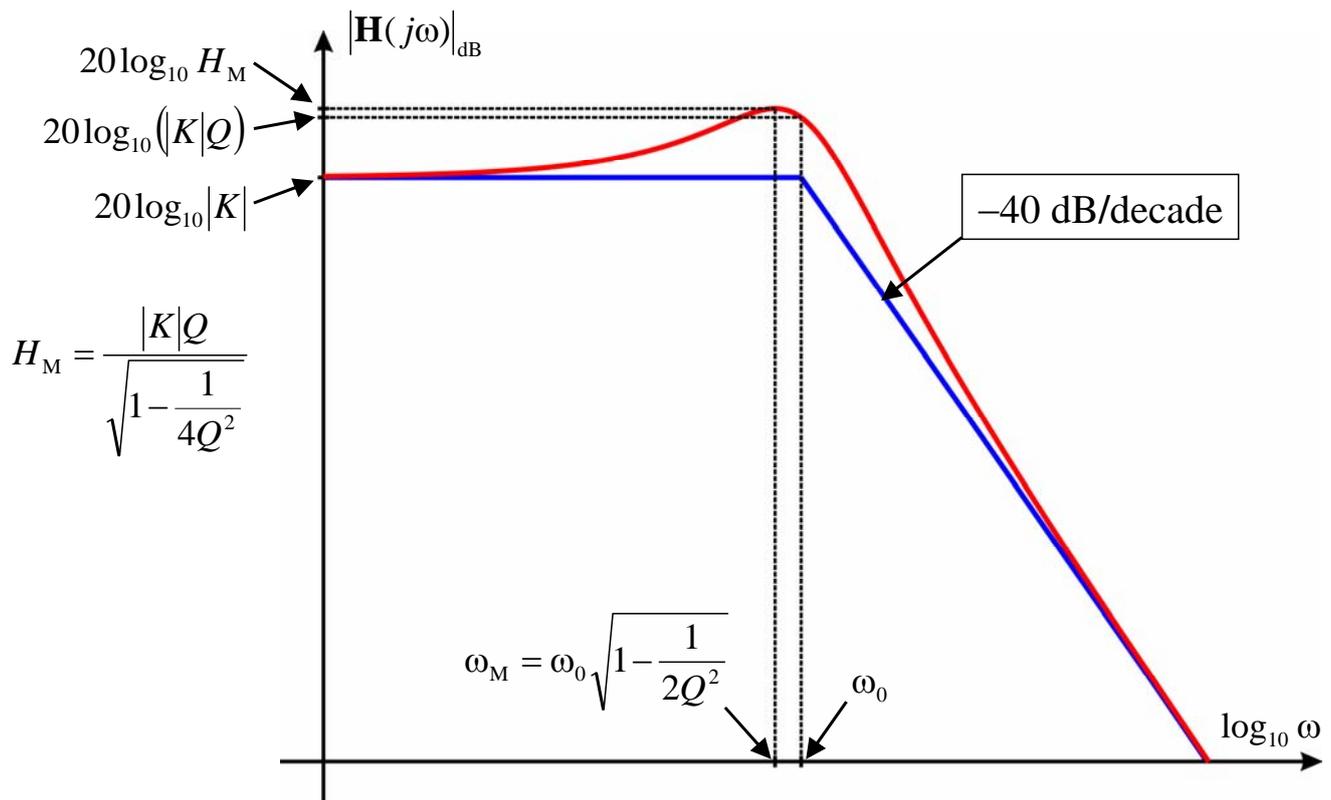
$$\omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

il cui valore è

$$H_M = |\mathbf{H}(j\omega_M)| = \frac{|K|Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{|\mathbf{H}(j\omega_0)|}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

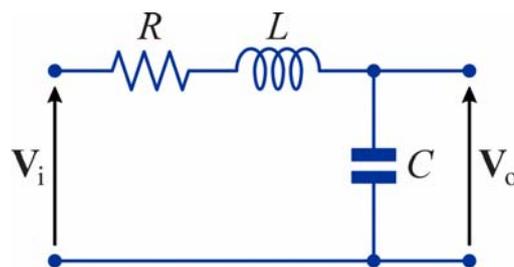
54

Filtro passa-basso del secondo ordine



55

Esempio di filtro passa-basso del secondo ordine



- La funzione di trasferimento è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (K = 1)$$

- Il guadagno in continua è $K = 1$ (= 0 dB)

56

Filtro passa-alto del secondo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{(j\omega)^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

cioè con due poli complessi coniugati e due zeri nell'origine, corrisponde a un filtro passa-alto

- Il diagramma asintotico di $|\mathbf{H}(j\omega)|$ è costituito da un asintoto con pendenza +40 dB/decade e da un asintoto orizzontale di ordinata $20\log_{10}(|K|\omega_0^2)$ (che rappresenta il **guadagno ad alta frequenza**) a partire da $\omega = \omega_0$
- Per $\omega = \omega_0$ si ha $|\mathbf{H}(j\omega_0)| = |K|Q\omega_0^2$, quindi, in particolare,
 - per $Q = 1/2$ il guadagno per $\omega = \omega_0$ è inferiore di 6 dB al guadagno ad alta frequenza
 - per $Q = \sqrt{2}/2$ il guadagno per $\omega = \omega_0$ è inferiore di 3 dB al guadagno ad alta frequenza

57

Filtro passa-alto del secondo ordine

- Per $Q > \sqrt{2}/2$ il modulo della f.d.t. ha un picco in corrispondenza della pulsazione

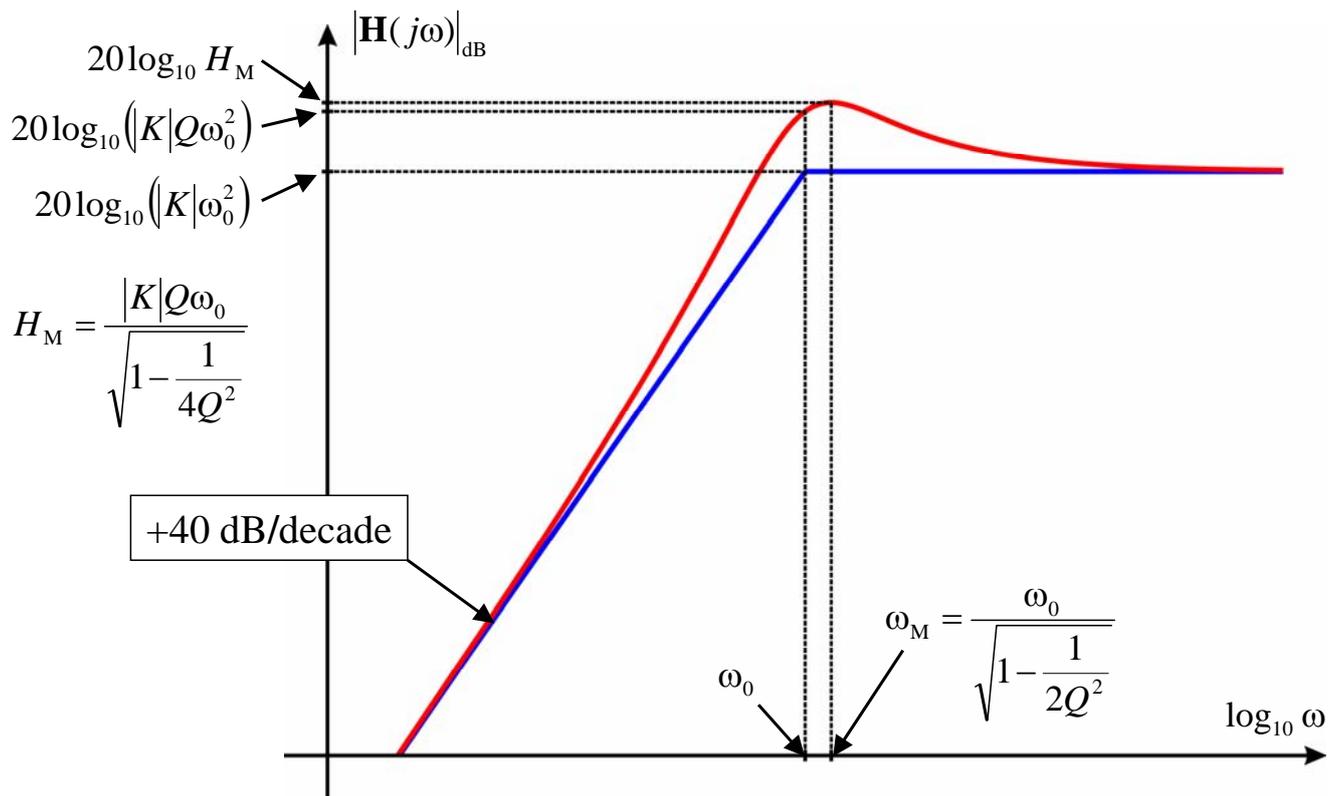
$$\omega_M = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

il cui valore è

$$H_M = |\mathbf{H}(j\omega_M)| = \frac{|K|Q\omega_0^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = \frac{|\mathbf{H}(j\omega_0)|}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

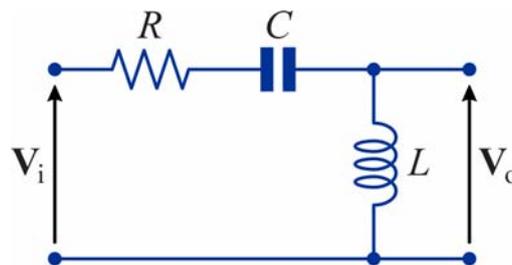
58

Filtro passa-alto del secondo ordine



59

Esempio di filtro passa-alto del secondo ordine



- La funzione di trasferimento è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{(j\omega)^2 LC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = K \frac{(j\omega)^2}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad K = LC = \frac{1}{\omega_0^2}$$

- Il guadagno in continua è $K\omega_0^2 = 1$ (= 0 dB)

60

Filtro passa-banda del secondo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{j\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

cioè con due poli complessi coniugati e uno zero nell'origine, corrisponde a un filtro passa-banda

- Il modulo della f.d.t. ha un massimo per $\omega = \omega_0$ (**pulsazione di centro banda**) che vale $|K|Q\omega_0$
- Il diagramma asintotico di $|\mathbf{H}(j\omega)|$ è costituito da un asintoto con pendenza +20 dB/decade e da uno con pendenza -20 dB/decade che si incontrano nel punto $\omega_0, 20\log_{10}(|K|\omega_0)$

61

Filtro passa-banda del secondo ordine

- L'andamento del modulo ha *simmetria geometrica* rispetto a ω_0 , cioè, date due frequenze ω_a e ω_b tali che $\omega_a\omega_b = \omega_0^2$ (e quindi $\omega_0/\omega_a = \omega_b/\omega_0$) si ha $|\mathbf{H}(j\omega_a)| = |\mathbf{H}(j\omega_b)|$
- Di conseguenza, se la frequenza è riportata in scala logaritmica, il grafico ha un andamento simmetrico rispetto a ω_0
- Questa proprietà può essere messa riscrivendo l'espressione della f.d.t. nella forma

$$\mathbf{H}(j\omega) = \frac{KQ\omega_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \Rightarrow |\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{|K|Q\omega_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

che si ottiene moltiplicando numeratore e denominatore per $-j \frac{Q\omega_0}{\omega}$

62

Filtro passa-banda del secondo ordine

- La banda passante del filtro viene definita convenzionalmente come intervallo compreso tra le pulsazioni ω_1 e ω_2 per cui il guadagno risulta inferiore di 3 dB al guadagno di centro-banda

- Quindi le pulsazioni di taglio possono essere determinate imponendo

$$|\mathbf{H}(j\omega)| = \frac{|K|Q\omega_0}{\sqrt{2}}$$

- Questo richiede che sia

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1 \Rightarrow \omega^2 \pm \frac{\omega_0}{Q}\omega + \omega_0^2 = 0$$

- Le soluzioni positive di questa equazione sono

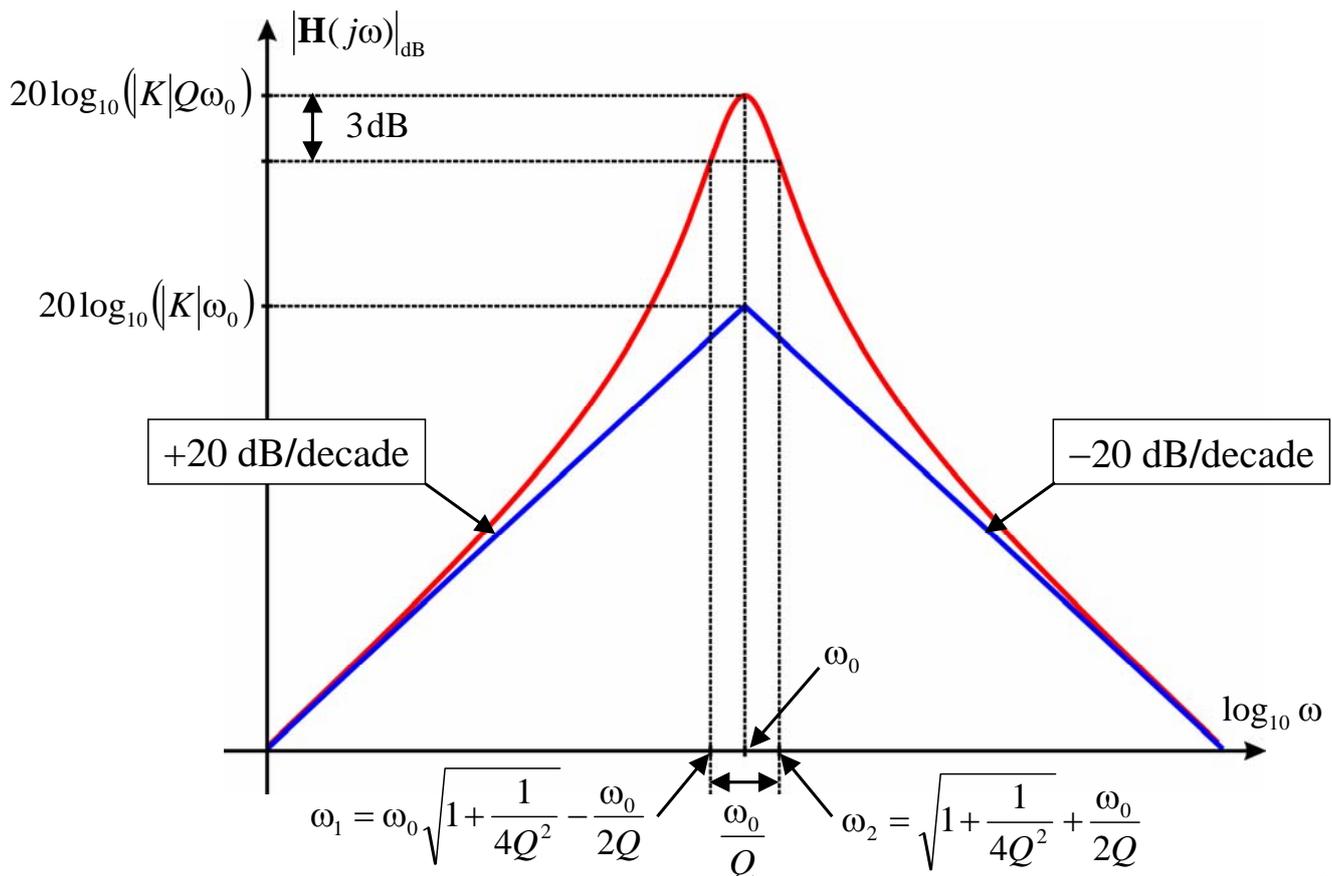
$$\omega_1, \omega_2 = \mp \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

- Di conseguenza la larghezza di banda è

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

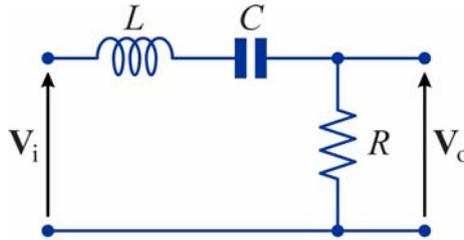
63

Filtro passa-banda del secondo ordine



64

Esempio di filtro passa-banda del secondo ordine



- La funzione di trasferimento è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = K \frac{j\omega}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad K = RC = \frac{1}{Q\omega_0}$$

- Il guadagno di centro banda è $KQ\omega_0 = 1$ (= 0 dB)
- La larghezza di banda è $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$

65

Filtro elimina-banda del secondo ordine

- Una funzione di trasferimento del tipo

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

cioè con due poli complessi coniugati e con due zeri immaginari coniugati, con pulsazione uguale a quella dei poli, corrisponde a un filtro elimina-banda

- Il modulo della f.d.t. si annulla per $\omega = \omega_0$ (detta, anche in questo caso, **pulsazione di centro banda**)
- Il diagramma asintotico di $|\mathbf{H}(j\omega)|$ si riduce a una retta orizzontale con ascissa pari a $20\log_{10}|K|$, che rappresenta il valore del guadagno in continua e ad alta frequenza

66

Filtro elimina-banda del secondo ordine

- Anche in questo caso l'andamento del modulo ha *simmetria geometrica* rispetto a ω_0 , come risulta evidente se si riscrive l'espressione della f.d.t. nella forma

$$\mathbf{H}(j\omega) = K \frac{jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

- Procedendo come nel caso del filtro passa-banda si trova che le pulsazioni di taglio sono date ancora della relazioni

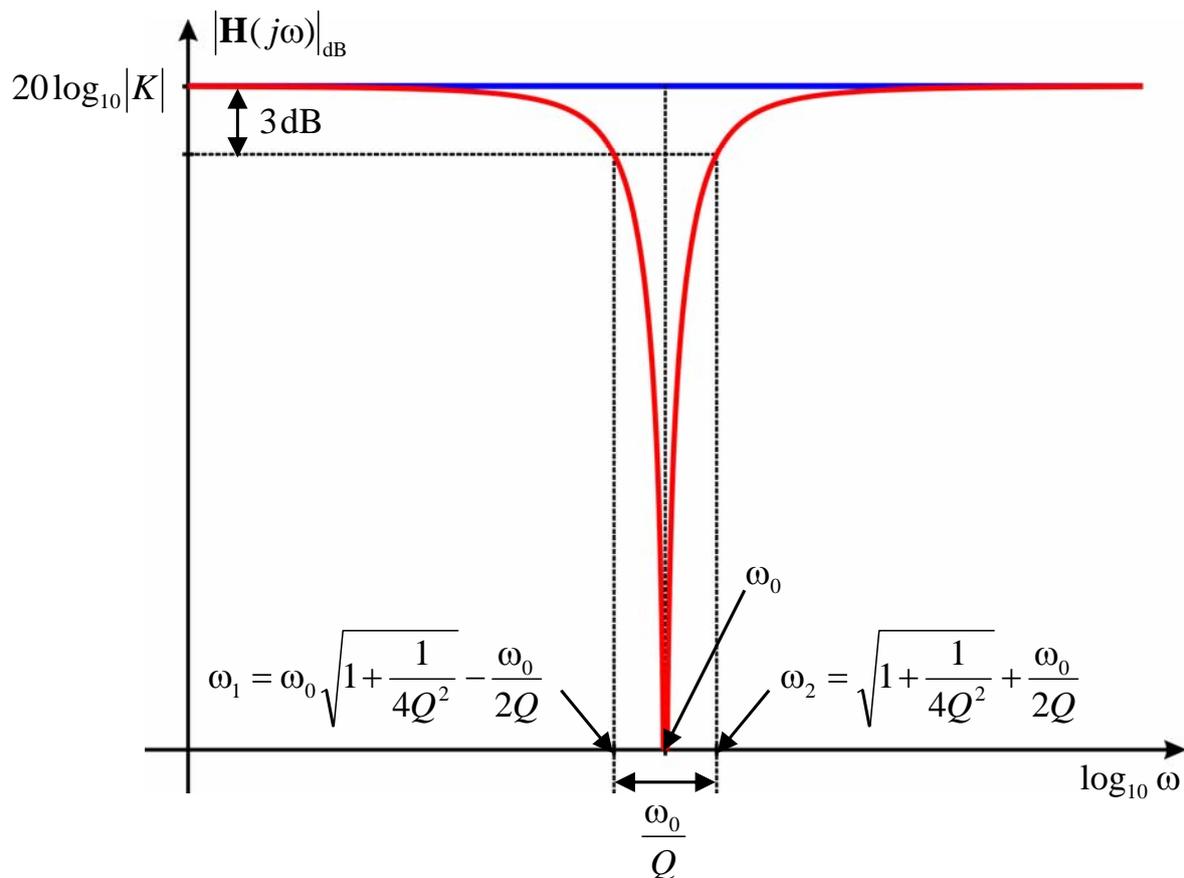
$$\omega_1, \omega_2 = \mp \frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$$

e quindi la larghezza di banda è

$$B = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

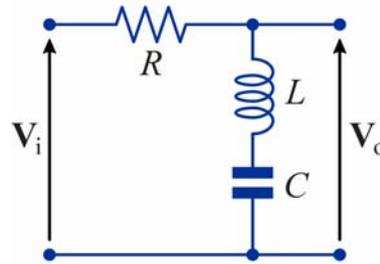
67

Filtro elimina-banda del secondo ordine



68

Esempio di filtro elimina-banda del secondo ordine



- La funzione di trasferimento è

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 - \omega^2 LC}{j\omega RC - \omega^2 LC + 1} = \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

dove

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\omega_0 L}{R} \quad (K = 1)$$

- Il guadagno di centro banda è $K = 1$ (= 0 dB)

- La larghezza di banda è $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$